CÁLCULO MULTIVARIABLE

Desarrollo de habilidades del pensamiento matemático



DRA. JOSEFINA DE LAS MERCEDES CRIBEIRO DÍAZ
M.C. ARIANA CAROLINA HERNÁNDEZ
DR. HUMBERTO MADRID DE LA VEGA
M.C. CINTHYA DE JESÚS MORLETH MOTA







CÁLCULO MULTIVARIABLE

Desarrollo de habilidades del pensamiento matemático

Dra. Josefina de las Mercedes Cribeiro Díaz
Dr. Humberto Madrid de la Vega
M.C. Ariana Carolina Hernández Cuevas
M.C. Cinthya de Jesús Morleth Motao

Diseño de portada: Alejandro Madrid Morelos

Universidad Autónoma de Coahuila

Boulevard Venustiano Carranza

Colonia República, C.P. 25280

Saltillo, Coahuila

ISBN: 978-607-506-143-6

Impreso en México

Presentación

Una preocupación central del personal del C.I.M.A. en estos años, ha sido la de investigar el "Problema General de la Enseñanza de las Matemáticas"; y producir materiales basados en un nuevo método fundamentado en el Constructivismo, para dejar atrás el método tradicional que es fuente de muchos males en el proceso educativo. Hoy, la tecnología, en particular la computadora y las Hojas de Trabajo hacen posible este cambio; sin embargo se requieren crear las condiciones materiales, de capacitación de profesores e institucionales para impulsar la superación de las viejas dolencias en el área de la matemática educativa.

Estos libros al incluir el uso de la computadora para el proceso de enseñanza aprendizaje, están cambiando radicalmente el modelo tradicional de enseñanza de las matemáticas. Si antes el principal actor era el profesor que exponía verbalmente y en el pizarrón un concepto, los métodos o algún tema para que el alumno lo memorizara, con el uso de la tecnología el alumno conduce sus propias acciones para aprehender el contenido, guiados por lo que el profesor diseñó para cumplir los objetivos. El estudiante ya no está pasivo, tratando de memorizar lo que el profesor verbaliza en un lenguaje abstracto, ahora el propio alumno se enfrenta al problema que plantea la Hoja de Trabajo, ejecuta las acciones necesarias, explora, visualiza y en definitiva piensa soluciones y las calcula para obtener resultados, ejecutando los procesos lógicos del raciocinio lo que fortalece su pensamiento matemático.

Este es el camino para eliminar los fantasmas y los mitos sobre la disciplina, así como lograr más y mejores metas en la educación matemática.

La Doctora Josefina de las Mercedes Cribeiro Díaz encabezando un equipo de trabajo del C.I.M.A., con su larga experiencia académica y su amplio esfuerzo, como resultado de un proyecto de investigación apoyado por FOMIX-COECYT aporta suficientes Hojas de Trabajo para el aprendizaje de cálculo diferencial, integral y multivariable en un paquete de tres libros dedicados a los alumnos de matemáticas aplicadas, ingeniería y áreas afines. Por eso sus contenidos fueron ajustados y probados en sesiones experimentales con estudiantes de la Facultad de Sistemas de la U.A. de C.. También forman parte de una serie de libros para maestros y alumnos, publicados con anterioridad.

Con ello el CIMA aporta a la comunidad un valioso instrumento para que sumado a otros esfuerzos, se contribuya a mejorar sustancialmente la matemática educativa en nuestra institución y en la región. El éxito depende mucho del impulso a un programa para que los profesores hagan suyo el método constructivista basado en la tecnología, con base en los materiales que estos libros pone a su disposición.

Francisco Javier Cepeda Flores

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Como resultado de años de investigación en diferentes instituciones de Educación Superior a fin de determinar la forma en que los estudiantes enfrentan el aprendizaje de las matemáticas, sus hábitos de estudio y las dificultades que presentan con temas ya tratados en el nivel anterior, el colectivo de autores sacan a la luz tres libros vinculados con Cálculo Diferencial Cálculo, Integral y Cálculo Multivariable, con el objetivo de desarrollar habilidades del pensamiento matemático.

Estos tres libros son resultado del proyecto financiado por FOMIX-CONACYT "Incidencia de las tecnologías de la información en el aprendizaje de las ciencias exactas para los programas de estudio de ingeniería relacionados con las tecnologías de la información" aplicado en la Facultad de Sistemas de la Universidad Autónoma de Coahuila. Se realizaron encuestas para determinar la forma de estudio y el desarrollo de capacidades de los estudiantes. Se estableció un diagnóstico de las características de los estudiantes, la forma de impartición de las clases y el sistema de evaluación utilizado.

A partir del diagnóstico se diseñaron Hojas de Trabajo, las cuales se aplicaron a un grupo de estudiantes de la Facultad de Sistemas de la U. A. de C. El diseño sigue la metodología de Cribeiro [6] bajo el marco teórico de la Teoría de la activación de Aprendizaje por etapas de Galperin [9] bajo el enfoque histórico cultural de Vigotski [22] en el marco teórico del constructivismo.

En cada Hoja de Trabajo se establece un título, se declaran los objetivos y se transita por las diferentes etapas de construcción del conocimiento, por ello cada objeto de estudio comienza a tratarse a partir de los elementos básicos sobre los cuales se debe de anclar el nuevo conocimiento. Se construyen los conceptos a partir de preguntas y razonamientos geométricos, mediante exploraciones de las características del objeto matemático que se estudia, posteriormente se pide que expresen en lenguaje español y en lenguaje matemático las ideas, las comuniquen, discutan, sinteticen, concluyan, generalicen dichas ideas y se integre el nuevo conocimiento derivado de conocimientos anteriores. En todos los casos se busca que los estudiantes apliquen los conocimientos a situaciones nuevas. Dependiendo del tema, la longitud de cada Hoja de Trabajo varía entre diez a quince cuartillas, como promedio. Constan de seis partes: Conceptos a recordar, construcción del concepto, sintetizar ideas, ejercicios y problemas, trabajo independiente y conclusiones

CONCEPTOS A RECORDAR. Esta parte debe ser trabajada en equipo, con el aporte de todos los miembros del equipo. Las Hojas de Trabajo comienzan tratando los elementos básicos que deben de servir de ancla a los nuevos conocimientos, a partir de los elementos básicos necesarios para la comprensión del concepto a tratar. Esta parte corresponde la base orientadora de la actividad, donde se busca orientarse en las acciones que se deben de realizar.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO. Esta parte debe ser trabajada en elaboración conjunta profesor y estudiantes, en la forma tradicional de enseñanza es la parte en que el profesor

explica. En la fase de diseño, a partir de los conocimientos básicos, mediante preguntas y razonamientos geométricos se trabaja con las características del concepto que se desea construir, las propiedades del concepto o el método que se debe de proponer. Es una fase exploratoria, donde se trabaja con las diferentes representaciones y el paso de una a otra, la geométrica, la algebraica, la expresión en lenguaje español y en lenguaje matemático. En esta parte se busca desarrollar las capacidades de observar, identificar propiedades, interpretar enunciados, clasificar, analizar, expresar ideas en lenguaje español, expresar ideas en lenguaje matemático. Es una etapa de exploración donde se trabaja con apoyo material de libros, notas de clase, computadora y software adecuado, apoyo del docente y apoyo de los compañeros.

SINTETIZAR IDEAS. Esta parte debe ser trabajada en equipo para exponer los resultados. Una vez construido el concepto, declaradas las propiedades o propuesto el método de trabajo, se pide que se haga un análisis del trabajo realizado, se inter relacionen los diferentes aspectos en las diversas representaciones y se sinteticen los resultados principales para aplicar los conocimientos a situaciones nuevas. En esta parte se tiene como objetivo desarrollar la capacidad de analizar, reflexionar y de sintetizar ideas. Se trabaja con apoyo material de libros, notas de clase, apoyo del docente y participación de los compañeros.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS. Esta fase debe ser trabajada en equipo discutida y expuesta en el grupo. Se plantean ejercicios a resolver para reafirmar los conocimientos. En cada tema se presentan problemas para resolver. En esta parte se tiene como objetivo desarrollar la capacidad de resolver problemas. Se trabaja con apoyo material de libros, notas de clase, computadora y software adecuado, apoyo del docente y apoyo de los compañeros. El uso del lenguaje ayuda a hacer consciente el proceso y a la internalización del conocimiento para pasar de la etapa externa a la etapa interna.

TRABAJO INDEPENDIENTE. En esta etapa los estudiantes deben de trabajar en forma independiente, solos en casa, respondiendo en forma reflexiva para contestar y entregar la Hoja de Trabajo. A partir de los diferentes casos particulares se busca que los estudiantes lleguen a la generalización y la abstracción. En esta etapa se tiene por objetivo la independencia total del alumno y que el proceso pase a la etapa mental sin apoyo material. Se trata de desarrollar la capacidad de generalizar y abstraer.

CONCLUSIONES. El final de cada Hoja de Trabajo es un resumen a modo de conclusiones, el cual sintetiza en forma breve todos los resultados obtenidos para recordar a fin de utilizarlo en el futuro. Debe ser elaborado en forma independiente por cada estudiante y discutida después en el grupo.

Cada uno de los libros no pretende sustituir los libros de texto sino ser un complemento de los mismos que ayude a los estudiantes a construir el conocimiento pasando de visualizaciones geométricas y casos particulares a generalizar ideas y conceptos. Además pasar de situaciones

generales a aplicar en casos particulares, su objetivo es lograr conjuntamente con la adquisición de conocimientos, desarrollar en los estudiantes las capacidades de observar, identificar propiedades, clasificar, analizar, interpretar enunciados, expresar ideas en lenguaje natural, expresar ideas en lenguaje matemático, sintetizar, concluir, generalizar, integrar conocimientos, aplicar conocimientos en situaciones nuevas. Con ello formar y fortalecer el pensamiento matemático.

El presente libro de Hojas de Trabajo de Cálculo Multivariables consta de doce Hojas de Trabajo, las dos primeras trabajan la Geometría Analítica en el espacio. En la primera Hoja de Trabajo se sitúa un punto en el eje real, en el plano y en el espacio. Se comienza a definir distancia entre dos puntos en el eje real, en el plano, en el espacio y su generalización para IR^n. Se comparan las definiciones de recta en el plano y en el espacio, circunferencia y esfera. Se trabaja el concepto de superficie y se vinculan con los conceptos de relación y función.

La segunda Hoja de Trabajo trata diferentes sistemas coordenados y el paso de uno a otro. Se trabaja en coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas.

Las Hojas de Trabajo tres y cuatro trabajan vinculan el concepto de relación y función de una y varias variables. Los conceptos de dominio y recorrido.

Las Hojas de Trabajo cinco y seis tratan el concepto de derivada de funciones de varias variables. La Hoja cinco construye el concepto de derivada direccional, derivadas parciales. La Hoja número seis trabaja con el concepto de derivadas de funciones compuestas.

Las Hojas de Trabajo siete y ocho trabajan el concepto de diferencial de funciones de varias variables. La Hoja de Trabajo nueve trata la optimización de funciones de varias variables.

Las Hojas de Trabajo diez y once tratan las integrales múltiples, la diez trabaja la integral doble y la once las integrales triples. La Hoja de Trabajo doce trata sobre las aplicaciones de las integrales múltiples.

I. Geometría Analítica en el espacio

HOJA DE TRABAJO 1. RECTAS Y PLANOS.

RELACIÓN ENTRE PUNTOS EN EL EJE REAL, EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. RECTAS Y PLANOS. CIRCUNFERENCIAS Y ESFERAS

OBJETIVOS

- Relacionar las coordenadas de un punto en el eje real, en el plano y en el espacio con su entorno familiar y con problemas de actualidad en ciencia, economía y/o tecnología.
- Observar las características de las representaciones de los puntos.
- Identificar variables
- Determinar los conjuntos donde varían las variables.
- Representar puntos, rectas, planos y superficies en forma gráfica, algebraica, tabular, simbólica, verbal y pasar de una representación a otra.
- Construir el concepto intuitivo de puntos, rectas, planos, circunferencias, esferas a partir de las características, diferentes conjuntos y diferentes leyes que los relacionan.
- Formular los conceptos.

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS A RECORDAR

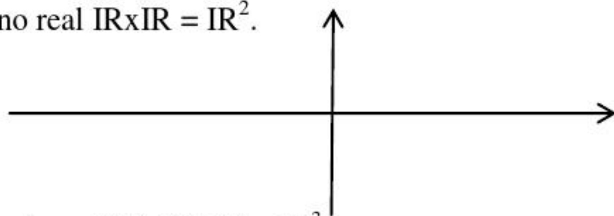
Problema 1:

Establecer intercambio de ideas sobre las representaciones de un punto en el eje real, en el plano y en el espacio. Considerar valores racionales, destacar las diferencias y analogías de los diferentes casos.

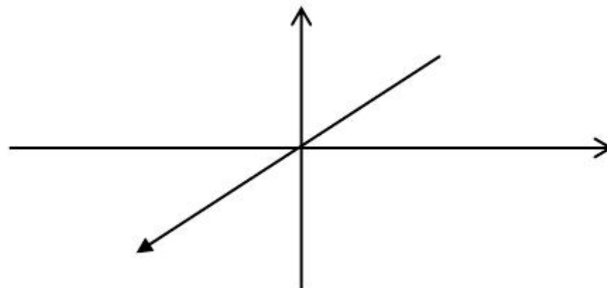
i) Situar diferentes puntos en el eje real IR.



ii) Situar diferentes puntos en el plano real IRxIR = IR^2.



iii) Situar diferentes puntos en el espacio real IRxIRxIR = IR^3.



iv) Para cada caso analizar la cantidad de componentes que tiene cada punto y establecer la forma de determinar la distancia entre dos puntos.

v) Trazar una recta en el espacio. Determinar los ángulos directores formados por la recta y los ejes coordenados.

vi) Hallar los cosenos directores de una recta en el espacio.

vii) Si se eleva al cuadrado cada uno de los cosenos directores y se suma se obtiene

viii) Hallar números directores para par de puntos en el espacio que estén vinculados con los cosenos directores.

ix) Señalar la relación entre números directores, ángulos directores y cosenos directores de una recta en el espacio.

x) Al hallar la posición de una recta en el plano, se toman en consideración dos puntos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2). Se trabaja con la diferencia de abscisas y de ordenadas y la pendiente de la recta en función de esas diferencias. Compara con la posición de la recta en el espacio y el uso de ángulos directores, cosenos directores y números directores. Explica por qué consideras que sean necesarios estos elementos en el caso de la posición en el espacio de la recta y no en el caso de la recta en el plano.

xi) Angulo formado por dos rectas en el espacio

Teorema 1: El ángulo formado por do rectas dirigidas cualesquiera en el espacio, cuyos ángulos directores son $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\gamma_1}$ y $\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{\gamma_2}$ respectivamente, se determinan por la relación

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha_1})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha_2}) + \mathbf{cos}(\boldsymbol{\beta_1})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\beta_2}) + \mathbf{cos}(\boldsymbol{\gamma_1})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\gamma_2})$$

Esta relación puede ser escrita en términos de los números directores de la siguiente forma

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\boldsymbol{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}}{\sqrt{\boldsymbol{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}\sqrt{\boldsymbol{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}}$$

xii) **Corolario 1:** Para que dos rectas sean **paralelas y del mismo sentido** es condición necesaria y suficiente que sus ángulos directores correspondientes sean iguales, para que sean **paralelas y de sentido opuestos** es necesario y suficiente que sus ángulos directores sean suplementarios.

Corolario 2: Para que dos rectas dirigidas sean **perpendiculares** es condición necesaria y suficiente que la suma de los productos de sus cosenos directores correspondientes sea igual a cero.

xiii) **Definición 1:** Se denomina **intercepción** de una superficie sobre un eje coordenado a la coordenada correspondiente del punto de intersección de la superficie y el eje coordenado

xiv) **Definición 2:** Se denomina **traza** de una superficie sobre un plano coordenado a la curva de intersección de la superficie y el plano coordenado.

xv) Hallar la ecuación de una recta en el plano y en el espacio. Establecer la analogía entre ellas y la diferencia entre ellas a partir de las necesidades de poder identificarlas por sus características.

xvi) Hallar la ecuación de un plano.

xvii) Hallar la ecuación de la circunferencia y de la esfera.

xviii) Escribir los resultados importantes obtenidos en esta sesión.

1. Seleccionar material y observar:

— Escribe el concepto de conjunto:

— Escribe el concepto de relación entre conjuntos:

i. Analiza y contesta lo siguiente:

Sean A y B dos conjuntos tales que:

Ropa = {playera, pantalón, camisa} *Color={negro, blanco}*

— Forma el conjunto *R* de todas las relaciones entre la ropa y color:

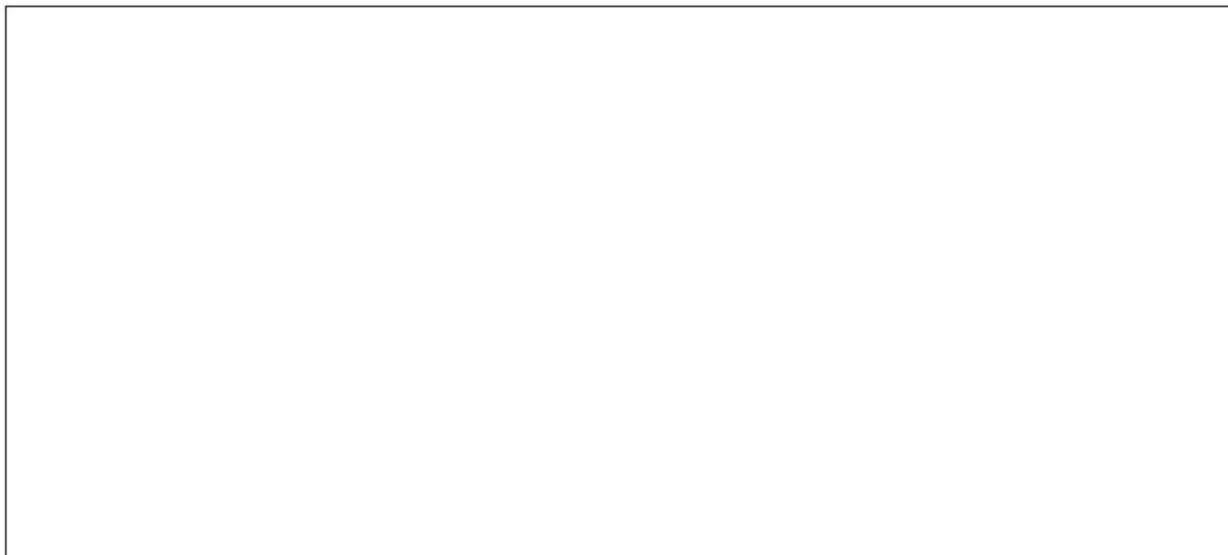
— **Analiza las siguientes relaciones y determina si a cada elemento del conjunto *de Ropa* le corresponde un único color:**

RELACIÓN	SI	NO	¿POR QUÉ?
R_1 = {(playera, blanco)}			
R_2 = {(playera, blanco), (playera, negro)}			
R_3 = {(pantalón, blanco), (camisa, blanco)}			
R_4={(playera, blanco), (camisa, blanco), (camisa, negro)}			
R_5 = {(playera, negro), (camisa, negro)}			
R_6 =*{(playera, blanco), (playera, negro), (camisa, negro), (pantalón, blanco)}*			
R_7 =*{(playera, blanco), (camisa, blanco), (camisa, negro)}*			
R_8 =*{(playera, blanco), (camisa, blanco), (camisa, negro)}*			

ii. De acuerdo a los conjuntos dados, establece el grafico de las siguientes relaciones, tomando en cuenta al conjunto *A* como conjunto de partida y el conjunto *B* como conjunto de llegada. Determina el conjunto A_1 de A relacionado con B y el subconjunto B_1 de B relacionado con A:

RELACIÓN	GRAFICA
$y = 3x - 1$ tal que $A = \{ x = 2n$ con $n = 0,1,2,3... \}$ y $B = \{ y \in R \}$ $A_1 = \{ \quad \}$ $B_1 = \{ \quad \}$	
$y = 3x - 1$ tal que $A = \{ x \in R^- \}$ y $B = \{ y \in R \}$ $A_1 = \{ \quad \}$ $B_1 = \{ \quad \}$	
$y = 3x - 1$ tal que $A = \{ x \in N \}$ y $B = \{ y \in N \}$ $A_1 = \{ \quad \}$ $B_1 = \{ \quad \}$	
$y = 3x - 1$ tal que $A = \{ x \in R^- \}$ y $B = \{ y \in N \}$ $A_1 = \{ \quad \}$ $B_1 = \{ \quad \}$	

iii Generaliza estas ideas para el caso de puntos en el espacio y rectas en el espacio.



II. CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO. Identificar, interpretar y analizar

a) Construcción de los conceptos de punto en el espacio, recta en el plano y el espacio. Plano, circunferencia y esfera.

A partir de las siguientes expresiones

$y = mx + b$, $Ax + By + Cz + D = 0$; $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ considerar diferentes valores de m, b, A, B, C, D, r para ver la influencia de los parámetros

Se recomienda utilizar Winplot o cualquier otro graficador

b) Buscar los conceptos de recta en el plano y en el espacio, circunferencia y esfera en diferentes libros, comparar los enunciados y relacionarlos con el trabajo indicado en el inciso a). Expresar las condiciones que se tienen que cumplir para tener cada definición.

c) Expresar la forma en que el trabajo realizado anteriormente contribuye a desarrollar las habilidades de seleccionar material, observar, identificar, interpretar y analizar.

d) Establecer la relación entre cada uno de los conceptos estudiados en la forma gráfica en la expresión en forma de ecuación y en la forma de conjuntos.

3. Ejercicios

1.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_1(-2,-1,5)$ y es perpendicular a la recta l determinada por los puntos $P_2(2,-1,-2)$ y $P_3(-3,1,-2)$

2.- Hallar la ecuación del plano que pasa por tres puntos no colineales $P_1(2,-1,1)$, $P_2(-2,1,3)$ y $P_3(3,2,-2)$

3.- Un plano pasa por el punto(3,3,-4) y los cosenos directores de su normal son 2/13, -12/13, -4/13. Hallar la ecuación del plano.

4.- El pie de la perpendicular trazada desde el origen a un plano es el punto (1,-2,1). Hallar la ecuación del plano.

5.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P_1 y dos de los ángulos directores de su normal son $\alpha = 60°$ y $\beta=45°$.

6.- Buscar cada estudiante en diferentes libros de Cálculo Multivariado dos ejercicios sobre rectas y planos. Resolverlos y explicarlos en el grupo.

III. SINTETIZAR LAS IDEAS PRINCIPALES

- Señalar las características de cada uno de los conceptos.
- Expresar la forma de aplicar esas características en cada uno de los ejercicios anteriores.

5. Establecer conjetura

- Relacionar los conceptos con los ejercicios del inciso 3.
- Formular estrategias de trabajo para enfocar los diferentes ejercicios haciendo uso de la teoría.

IV. ACCIONES EN EL AULA. SOLUCIÓN DE EJERCICOS Y PROBLEMAS

- Integrar al grupo en equipos

- Cada equipo debe de buscar una serie de ejercicios diferentes donde se apliquen los conceptos.
- Dar solución a los diferentes ejemplos vistos.
- Relacionar la solución gráfica con la algebraica.
- Exposición de trabajo y generar discusión.

Definición: Se denomina superficie al conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma $F(x,y,z) = 0$

Teorema 2 Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se les cambia el signo a dos variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable cuyo signo no se cambió y recíprocamente.

Teorema 3 . Si la ecuación de una superficie no se altera cuando sus tres variables cambian de signo, la superficie es simétrica con respecto al origen y recíprocamente.

V. TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASE

1. Determina si las siguientes expresiones algebraicas representan a una superficie. Justifica tus respuestas e identifica las superficies que representan, explicando las características por las que reconociste el tipo de superficie. En el caso de que no represente una superficie explica que representa de acuerdo a las características de la ecuación.

   - $3x + 2y - z = 12$
   - $y = 2x - 5$
   - $x + 2 = 3y - 1 = z - 4$
   - $5x - 7y + 3z - 10 = 0$
   - $4x - y + 2 = 0$
   - $x^2 + y^2 - 25 = 0$
   - $x^2 + y^2 = 16$
   - $3x^2 + 2y^2 - 6 = 0$
   - $2x^2 - y + 1 = 0$
   - $2x^2 - 4y^2 = 8$
   - $x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$
   - $x^2 + y^2 + z^2 = 49$
   - $x^2 + y^2 + z^2 = -25$
   - $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$
   - $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$

2. En cada uno de los ejemplos del inciso anterior (1) cambia los valores numéricos y con ayuda de un graficador explica la forma en que afectó el cambio de los valores numéricos. Señala si cambió el tipo de curva ó superficie, explica debido a que condiciones se produjo un cambio ó no.

3. Considerando que x, y, z toman valores en el conjunto de los números reales. Señala para cada uno de los ejemplos del inciso (1) si la expresión corresponde a una función ó simplemente es una relación. Explica la consideración que haces en base a la definición de función y de relación.

VI. CONCLUSIONES

CONCLUSION INDIVIDUAL

1) ¿Cómo defines una relación entre dos conjuntos cualesquiera?
____
____

2) ¿Cómo defines una función?____
____

3) ¿Todas las relaciones son funciones? Si___ No___

Porque:____
____

4) ¿Qué características o propiedades deben cumplir las relaciones para ser una función?____
____

5) ¿Todo grafico representa a una función? ¿Por qué?
____
____

6) ¿Cómo definirías al conjunto de llegada y de partida de una función?

____

____

7) ¿Cómo definirías el dominio y la imagen de una función?

____

____

8) Al cambiar los conjuntos de partida y llegada ¿se obtiene la misma gráfica?
____

____

9) ¿Es igual el conjunto de partida de la función que el dominio para cualquier función? Justifica tu respuesta____

____

10) ¿Es igual el conjunto de llegada que su imagen para cualesquier función? Justifica tu respuesta ____

____

11) ¿Cómo debe ser el dominio de una función en relación (mayor, menor o igual) a su conjunto de partida? ____

12) ¿Cómo debe ser la imagen de una función en relación (mayor, menor o igual) a su conjunto de llegada ____

13) Siempre el dominio e imagen de una función en matemáticas es igual al dominio e imagen de la vida real ¿Por qué?

14) Señala la diferencia entre ecuación de una recta, función lineal y recta en el plano

15) Señala la diferencia entre ecuación de una recta, función lineal y recta en el espacio

16) Señala la diferencia entre ecuación de una circunferencia, y circunferencia en el plano

17) Señala la diferencia entre ecuación de una esfera, y esfera en el espacio

18) ¿El conjunto de puntos de una circunferencia es una función? Justifica

19) ¿El conjunto de puntos de una esfera es una función? Justifica

CONCLUSION GRUPAL

DEFINICION DE RELACION

DEFINICION DE FUNCIÓN

DEFINICION DE DOMINIO

DEFINICION IMAGEN

HOJA DE TRABAJO 2. COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

RELACIÓN ENTRE PUNTOS EN EL EJE REAL, EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO. REPRESENTACIÓN DE PUNTOS Y SUPERFICIES EN DIFERENTES SISTEMAS DE COORDENADAS. COORDENADAS POLARES. COORDENADAS CILÍNDRICAS. COORDENADAS ESFÉRICAS.

OBJETIVOS

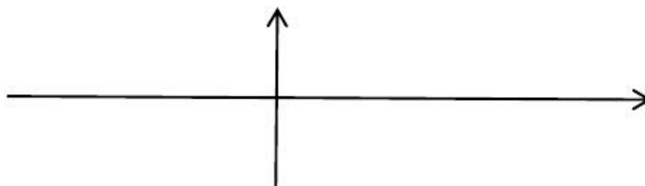
- Relacionar las coordenadas de un punto en el eje real, en el plano y en el espacio con su entorno familiar y con problemas de actualidad en ciencia, economía y/o tecnología.
- Observar las características de las representaciones de los puntos en diferentes sistemas de coordenadas.
- Identificar variables
- Determinar los conjuntos donde varían las variables.
- Representar puntos, rectas, planos y superficies en forma gráfica, algebraica, tabular, simbólica, verbal en diferentes sistemas de coordenadas y pasar de una representación a otra.
- Construir el concepto intuitivo de puntos, rectas, planos, circunferencias, esferas, parábolas, elipses, hipérbolas a partir de sus características. Construir los conceptos de superficies cilíndricas, cónicas, de revolución, cuádricas a partir de sus características y representarlas en diferentes sistemas de coordenadas.
- Formular los conceptos.

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS A RECORDAR

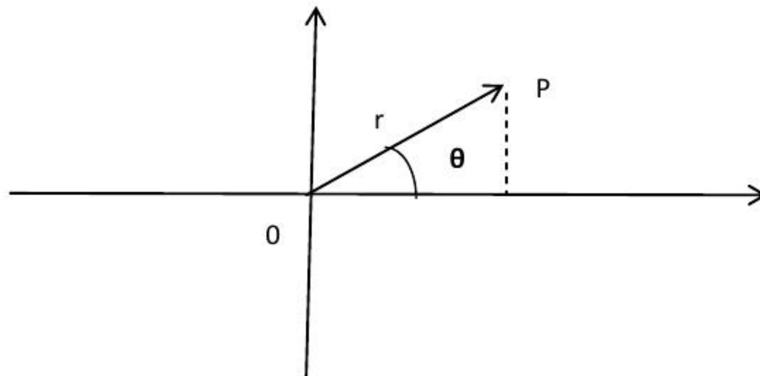
1. **Seleccionar material y observar:**

Establecer intercambio de ideas sobre las representaciones de un punto del plano en el sistema de coordenadas cartesianas y en el sistema de coordenadas polares. en el plano y en el espacio. Considerar las diferencias y analogías de los diferentes casos.

i) Situar diferentes puntos en el plano real IRxIR = IR^2.



ii) Un punto en el plano también puede ser representado refiriéndose a un radio vector y el ángulo que dicho radio forma con el eje horizontal.



Considerando el triángulo rectángulo formado por el origen, el punto P y la proyección del extremo del radio vector sobre el eje horizontal, hallar la relación del punto P(r, θ) con el valor x y con el valor y

sen(θ)=

cos(θ)=

r=

θ=

¿Cuáles son los valores que puede tomar el radio vector r?

¿Cuáles son los valores que puede tomar el ángulo θ?

x=

y=

Este sistema de coordenadas se denomina coordenadas polares.

iii) Pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas polares las ecuaciones de las siguientes curvas planas. Representarlas gráficamente mediante un graficador de funciones.

- $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

- $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

iv) Pasar de coordenadas polares a coordenadas cartesianas las ecuaciones de las siguientes curvas planas. Representarlas gráficamente mediante un graficador de funciones y analizar la formación de la curva a partir de los valores del ángulo.

- $\boldsymbol{r = \frac{2}{1-\cos(\theta)}}$

- $\boldsymbol{r^2 = 4\cos(2\theta)}$

- $\boldsymbol{r^2 = 2r - 2r\cos(\theta)}$

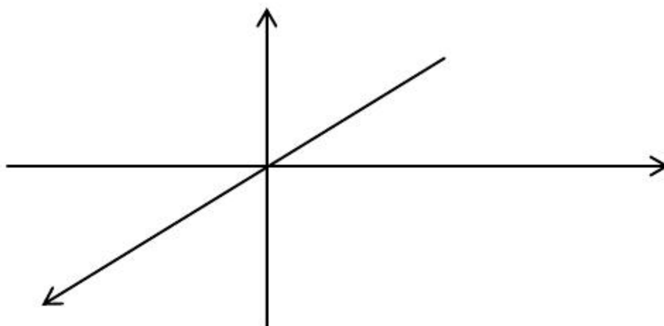
v) Buscar cada estudiante, en diferentes libros, 5 curvas planas representadas en coordenadas cartesianas y pasarlas a coordenadas polares y viceversa 5 curvas planas representadas en coordenadas polares y pasarlas a coordenadas cartesianas. Discutir en equipo y exponer en clases.

vi) Analiza a partir de las curvas planas representadas en los incisos iii), iv) y v) cuando es conveniente representar la curva en coordenadas cartesianas y cuándo en coordenadas polares. Discutir con los compañeros de equipo y en el aula con el docente los resultados de los análisis individuales. Escribir la conclusión grupal.

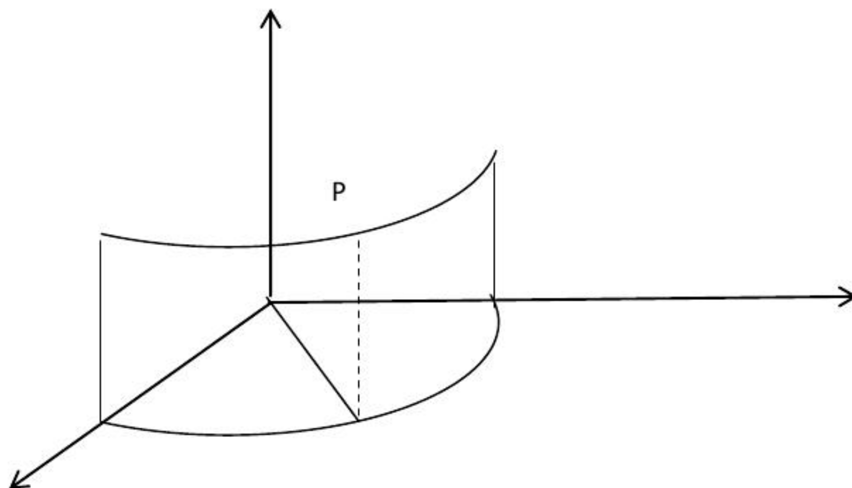
II.-CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO: Identificar, interpretar y analizar

Establecer intercambio de ideas sobre las representaciones de un punto del espacio en el sistema de coordenadas cartesianas y en el sistema de coordenadas cilíndricas. Considerar las diferencias y analogías de los diferentes casos.

i) Situar diferentes puntos en el espacio real IRxIRxIR = IR^3.



ii) Para cada caso representar el punto en coordenadas polares en el plano XY y considerara $z = z$.



Representar la forma en que quedan

$\text{sen}(\theta) =$

$\cos(\theta) =$

$r =$

$\theta =$

¿Cuáles son los valores que puede tomar el radio vector r?

¿Cuáles son los valores que puede tomar el ángulo θ?

$x =$

$y =$

$z =$

Este sistema de coordenadas se denomina coordenadas cilíndricas.

Definiciones básicas

Definición 1: Se denomina **superficie** al conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma F(x,y,z) = 0

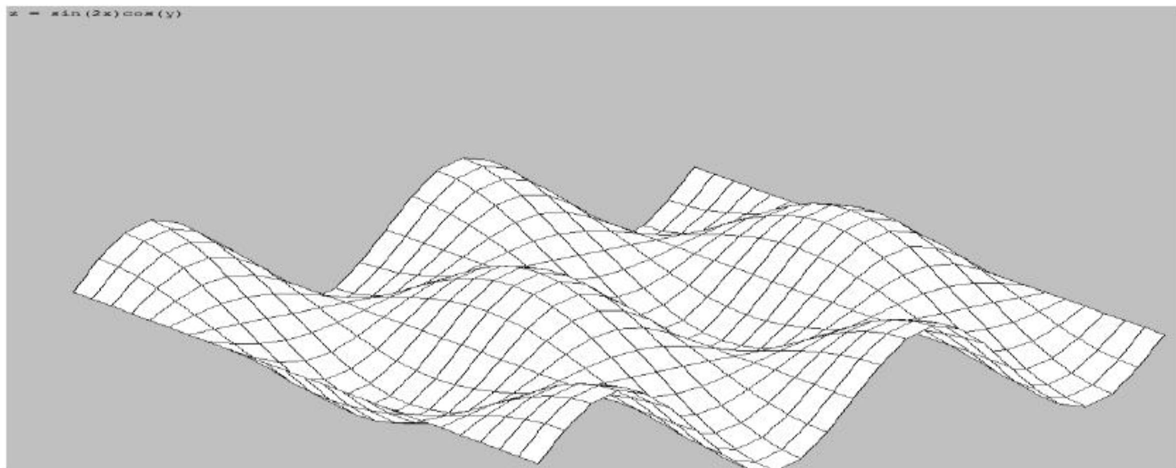
- $z - \text{sen}(2x)\cos(y) = 0$
- $z = x^2 + y^2$
- $z - x^2 - 2 = 0$

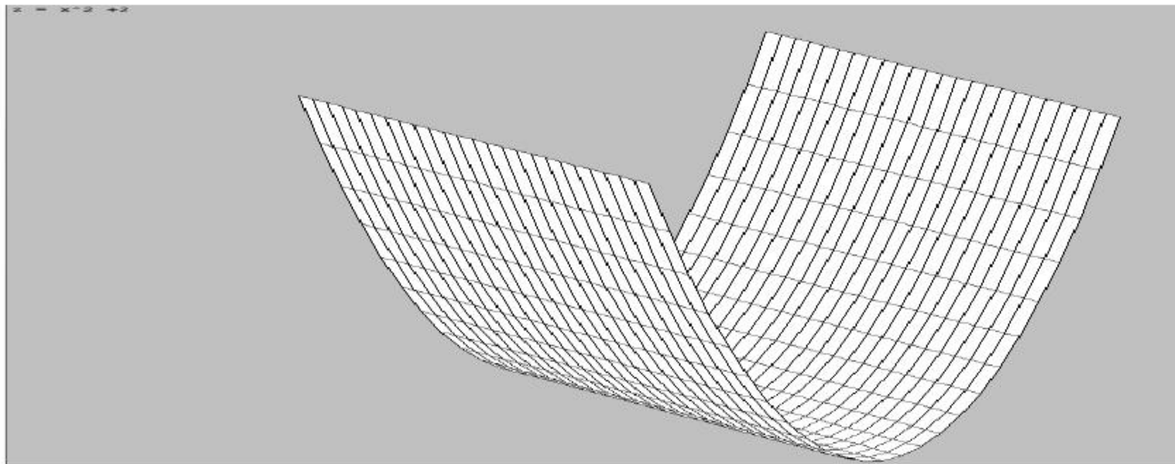
Teorema 2 Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se les cambia el signo a dos variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable cuyo signo no se cambió y recíprocamente.

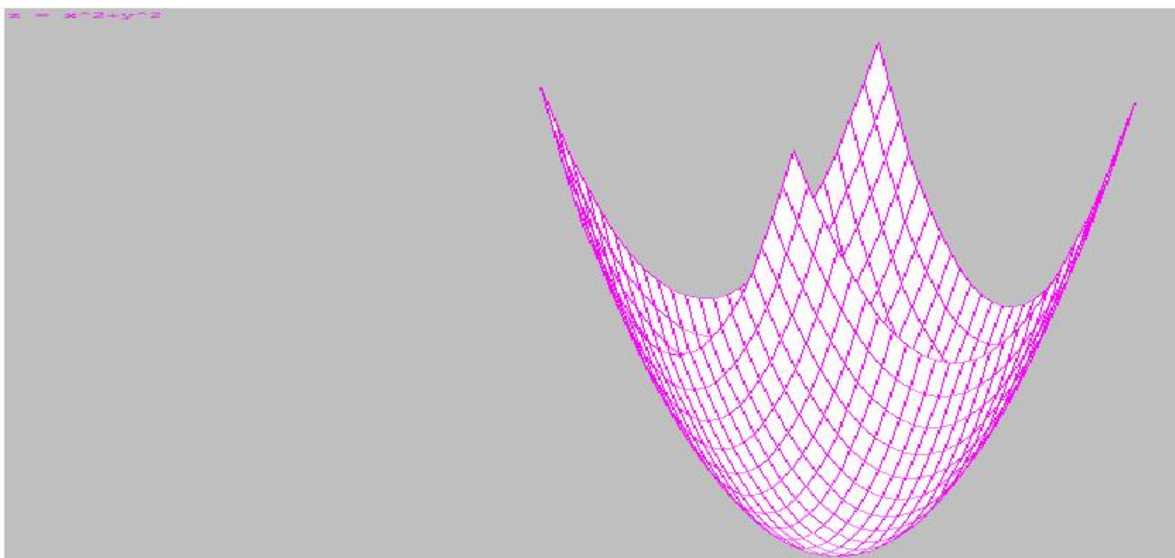
Teorema 3 . Si la ecuación de una superficie no se altera cuando sus tres variables cambian de signo, la superficie es simétrica con respecto al origen y recíprocamente.

Definición 2: Se denomina **intercepción** de una superficie sobre un eje coordenado a la coordenada correspondiente del punto de intersección de la superficie y el eje coordenado

Definición 3: Se denomina **traza** de una superficie sobre un plano coordenado a la curva de intersección de la superficie y el plano coordenado.







Definición 4: Se denomina **superficie cilíndrica** a la superficie generada por una recta que se mueve por una curva fija llamada directriz, en forma paralela a una recta fija. Los cilindros generados reciben el nombre de la curva directriz. Por ejemplo cilindro circular, cilindro elíptico, cilindro parabólico

- A partir de las definiciones dadas anteriormente expresa las ecuaciones de

  cilindro circular,

  cilindro elíptico,

  cilindro parabólico

- ¿Cómo representarías la ecuación de una superficie cilíndrica en coordenadas cilíndricas?

- Demostrar que la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la parábola $x^2 = 4y$, $z= 0$ y cuyas generatrices tienen por números directores [1,1,3], está dada por $9x^2 + z^2 – 6xz – 36y +12z = 0$
- Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz – 2yz = 1$ representa una superficie cilíndrica, hallar las ecuaciones de su directriz y los números directores de sus generatrices.
- ¿La ecuación $y^2 + z^2 = 9$ representa una superficie cilíndrica o una circunferencia? Explica tu conclusión
- Determinar la superficie cilíndrica recta cuya ecuación se da a continuación

i) $y^2+ z^2 = 4$

ii) $y^2+ z = 2$

iii) $9y^2 – 4 z^2 = 36$

iv) $9x^2 + 4 z^2 = 36$

v) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

- Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuyos números directores de sus generatrices y sus directrices se dan a continuación

i) $y^2 = 4x$, $z = 0$; [1,-1,1]

ii) $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$; [2,1, -1]

iii) $x^2 – y^2 = 1$, $z = 0$; [0,2,-1]

iv) $x^2 + y = 1$, , $z = 0$; [2,0,1]

v) $4x^2 + z^2 + 4z = 0$, $y = 0$; [4,1,0]

Teorema 4. Una ecuación representa una superficie cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a la directriz, si y solamente si carece de la variable no medida en ese plano. El lugar geométrico plano de esta ecuación es la directriz.

- Transformar las siguientes ecuaciones rectangulares a coordenadas cilíndricas

i) $2x = y$

ii) $x^2 + y^2 – 2y = 0$

iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

iv) $x^2 - z^2 = 4$

v) $y^2 = 4z$

- Transformar las siguientes ecuaciones cilíndricas a coordenadas rectangulares

i) $r = 2$

ii) $r = z$

iii) $r = 4\cos(\theta)$

iv) $r(\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)) - z = 4$

v) $r^2 \text{ sen}^2 (\theta) = 4(1 - z^2)$

- Demostrar que las siguientes ecuaciones representan superficies cilíndricas

i) $r = 2 \text{ sen}(\theta)$

ii) $r - r \text{ sen}(\theta) = 2$

iii) $r = 2(1 + \cos(\theta))$

iv) $r^2 = 2\cos(2\theta)$

v) $r - 2r \cos(\theta) = 1$

Definición 5: Se denomina **superficie cónica** a la superficie generada por una recta que se mueve por una curva fija llamada directriz y un punto fijo. La recta se llama generatriz, la curva directriz y el punto vértice. Los conos generados reciben el nombre de la curva directriz. Por ejemplo cono circular, cono elíptico.

- Demostrar que

  $36x^2 + 12y^2 + 9z^2 + 24xy + 18yz - 96x - 102y - 72z + 207 = 0$ es la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la elipse

  $4x^2 + z^2 = 1$, $y = 4$ y cuyo vértice es el punto (1,1,3)

- A partir de la ecuación de la superficie $x^2 + yz = 0$ Demostrar que el vértice de la superficie cónica es (0,0,0) y la ecuación de la directriz $x^2 = -2y$, $z = 2$

- Hallar la ecuación de la superficie cuyas directrices y coordenadas de su vértice son dadas.

i) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$; (0,0,0)

ii) $z^2 = 4y$, $x = 0$; (2,0,0)

iii) $y^2 + z^2 = 9$, $x = 2$; (-1,1,0)

iv) $x^2 - 4z^2 = 4$, $y = 3$; (-1,1,1)

- Identifique la superficie cuya ecuación se da a continuación

i) $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$

ii) $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0$

iii) $2x^2 - 4y^2 - z^2 = 0$

iv) $y^2 + xz = 0$

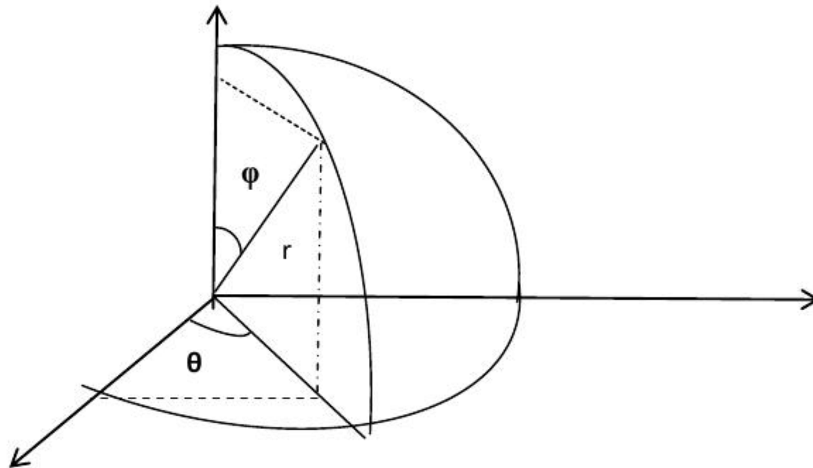
Teorema 5. La ecuación $Ax^2 + By^2 Cz^2 = 0$ representa una superficie cónica si y solamente si todos sus coeficientes son diferentes de ceros y no son del mismo signo. Su eje está entonces sobre el eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es de signo contrario al de los otros dos coeficientes.

Definición 6: Se denomina **superficie de revolución** a la superficie generada por la rotación de una curva plana en torno de una recta fija contenida en el plano de esa curva.

- Demostrar que $y^2 - 4x^2 - 4z^2 = 4$ es la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la hipérbola $y^2 - 4x^2 = 4, z = 0$
- Demostrar que $9y^2 + 9x^2 - z^2 = 9$ representa una superficie de revolución con generatriz $9y^2 - z^2 = 9, x = 0$

Definición 7: Se denomina **superficies cuádricas** a las que tienen como ecuación una ecuación de segundo grado con tres variables.

Representar un punto del espacio IRxIRxIR, teniendo en cuenta el radio vector que lo une con el origen (r), el ángulo que forma dicho radio vector con el eje z (φ) y el ángulo que la proyección (s) de este radio vector forma con el eje x (θ)



s =

z =

x =

y =

r =

θ =

φ =

¿Cuáles son los valores que puede tomar el radio vector r?

¿Cuáles son los valores que puede tomar el ángulo **φ** ?

¿Cuáles son los valores que puede tomar el radio vector s?

¿Cuáles son los valores que puede tomar el ángulo θ?

- Transformar a coordenadas esféricas y a coordenadas cilíndricas

i) $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$

ii) $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$

Escribir los resultados importantes obtenidos en esta sesión.

III. SINTETIZAR LAS IDEAS PRINCIPALES

- Señalar las características de cada uno de los conceptos.
- Expresar la forma de aplicar esas características en cada uno de los ejercicios anteriores.

4. Establecer conjetura

- Relacionar los conceptos con los ejercicios.
- Formular estrategias de trabajo para enfocar los diferentes ejercicios haciendo uso de la teoría.

IV. ACCIONES EN EL AULA. SOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

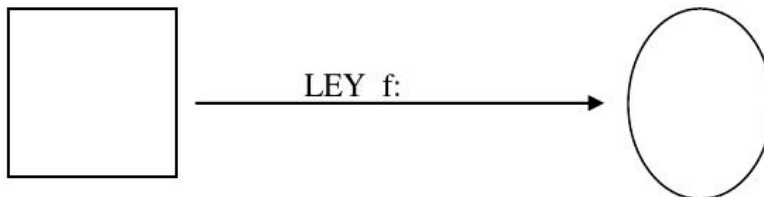
- Integrar al grupo en equipos
- Cada equipo debe de buscar una serie de ejercicios diferentes donde se apliquen los conceptos.
- Dar solución a los diferentes ejemplos vistos.
- Relacionar la solución gráfica con la algebraica.
- Exposición de trabajo y generar discusión.

V. TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASE

En cada uno de los ejemplos vistos, expresar como A al conjunto de las variables independientes; B al conjunto de las variables dependientes y f: la ley que los relaciona.

Represente todos los casos como $f : A \rightarrow B$, donde $A = \{ \qquad \}$, $B = \{ \qquad \}$

CONJUNTO A CONJUNTO B



Transita por las diferentes representaciones indicando en cada una de ellas las características que lo identifican como relación entre variables.

VI. CONCLUSIONES

De manera individual contesta las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo definirías al conjunto de llegada y de partida de una función?

____

____

2) ¿Cómo definirías el dominio y el codominio dentro de una función?

____

____

3) ¿Crees que todo grafico representa a una función? Justifica tu respuesta:

____

____

4) Al cambiar los conjuntos de partida y llegada ¿se obtiene la misma grafica?

____

____

5) ¿Cómo defines una relación entre dos conjuntos cualesquiera?

____

____

6) ¿Cómo defines una función?____

____

7) ¿Todas las relaciones son funciones? Si___ No___

Porque:____

____

8) ¿Qué características o propiedades deben cumplir las relaciones para ser una función?____

____

9) ¿Todo grafico representa a una función? ¿Por qué?

____

____

10) ¿Es igual el conjunto de partida de la función que el dominio para cualquier función? Justifica tu respuesta____

____

11) ¿Es igual el conjunto de llegada que su imagen para cuales quiera función? Justifica tu respuesta ____

____

12) ¿Cómo debe ser el dominio de una función en relación (mayor, menor o igual) a su conjunto de partida? ____

13) ¿Cómo debe ser la imagen de una función en relación (mayor, menor o igual) a su conjunto de llegada ____

14) Siempre el dominio e imagen de una función en matemáticas es igual al dominio e imagen de la vida real ¿Por qué?____

____

CONCLUSION GRUPAL

DEFINICIÓN DE RELACIÓN
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

DEFINICIÓN DE DOMINIO
DEFINICIÓN DE CODOMINIO

II. FUNCIONES

HOJA DE TRABAJO 3. INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

OBJETIVOS:

- Explicar el concepto de función de varias variables.
- Analizar el concepto de una función de varias variables como una extensión del caso de una sola variable.
- Destacar la importancia que tienen el dominio y la imagen dentro de una función.
- Desarrollar la capacidad de encontrar el dominio e imagen de una función de varias variables.
- Desarrollar la habilidad para trabajar en grupo o en equipo.

PROBLEMA DETONANTE DE LA MOTIVACIÓN:

Una empresa metalúrgica realizo un experimento para observar el alargamiento de una barra metálica bajo las siguientes especificaciones:

1. El tiempo de calentamiento no deberá ser mayor de 5 minutos.
2. La temperatura de calentamiento no deberá pasar de los 100°C.
3. La longitud de la barra deberá no pasar de 10 mm de alargamiento.

En el experimento se utilizó una barra metálica de 25cm controlando el tiempo y la temperatura de calentamiento para determinar la longitud de alargamiento a esperar.



Para observar dicha longitud de alargamiento se realizó un experimento, del cual se obtuvo la siguiente tabla del muestreo

Tiempo (min)	***Temperatura (°C)***	***Alargamiento (mm)***
0	46	0
1	55	1
1.5	58	2
2	62	3
2.5	65	4
3	73	5
3.5	80	7.5
4	85	8
4.5	98	9.9
5	100	12

Contesta las siguientes preguntas:

a. Escribe ¿cuáles son los datos que debemos conocer para determinar el alargamiento de la barra metálica, es decir cuáles son nuestras variables independientes?

____

b. Determina la variable dependiente del experimento:

____

c. Escribe como intervalo el tiempo cumpliendo con las especificaciones dadas por la empresa:

d. Escribe como intervalo la temperatura que cumpla con las especificaciones dadas por la empresa:

e. Escribe como intervalo la longitud de alargamiento para la barra:

f. Las variables ¿son continuas o discretas?

Temperatura:_____________ tiempo:__________________ Alargamiento:____________

g. ¿El tiempo y la temperatura de calentamiento pueden ser valores negativos?

__si __no Explica

____

h. ¿Que implicaría tener un valor negativo para longitud de la barra?

____

____

i. ¿Existe relación entre el tiempo y la temperatura de calentamiento de manera que determine una única longitud de alargamiento? __si __no Explica

____

____

j. ¿Es posible que puedan existir dos o más longitudes diferentes para dicha temperatura y tiempo de calentamiento? __si __no Explica

____

____

k. En base a los datos obtenidos en la muestra y bajo las mismas condiciones en que se realizó el experimento. ¿Se debe volver a definir un nuevo intervalo para el tiempo y una temperatura de calentamiento para cumplir con la especificación de la longitud de alargamiento? __si __no

Explica ____

____

l. ¿Cómo escribirías en términos de intervalo el tiempo y la temperatura de calentamiento en base a la muestra para la longitud de alargamiento?

Tiempo: $t \in$ _____	Temperatura: $T \in$ ______

m. ¿Cómo escribirías en términos de intervalo el alargamiento de la barra en base a la tabla de la muestra?

Alargamiento: $L \in$ _____

n. Si tomamos los datos de la tabla de la muestra como coordenadas. ¿Qué significa el punto (0, 0, 0) en el contexto del problema?_________________________________

____

o. ¿Crees que las variables matemáticas tienen sentido en un problema de contexto real?

____

____

p. En este problema ¿cuántas variables independientes hay?______________________

q. En este problema ¿Cuántas variables dependientes hay?________________________

r. Los datos de esta muestra tomados como tal, ¿cumplen con las propiedades de una función matemática?____

s. Los datos de la tabla ¿son una relación o una función? Explica porque

____

____

t. ¿Es posible obtener un valor de tiempo y temperatura que exactamente nos determine los 10 cm de alargamiento sin pasar del tiempo y temperatura en base a las especificaciones? __si __no Explica _______________________________

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS A RECORDAR

Contesta las siguientes preguntas:

1. Escribe el concepto de función de una variable, el de dominio y codominio:

____

____

2. ¿Cuáles son las propiedades que deben cumplir las relaciones entre dos conjuntos para determinar una función?

____

____

3. Explica ¿cuál es la diferencia que existe entre una relación y una función entre dos conjuntos *A* y *B?*:

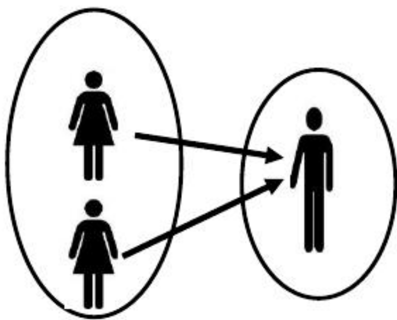
Función es____

____

Relación es____

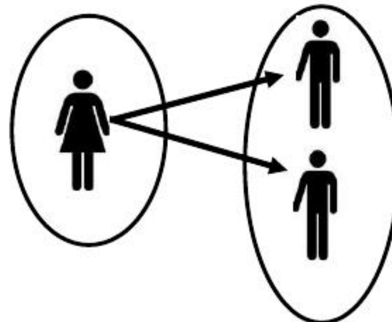
____

Escribe en la línea si los siguientes Diagramas de Venn representan a una relación o a una función tomando como a: A conjunto de partida y B conjunto de llegada.



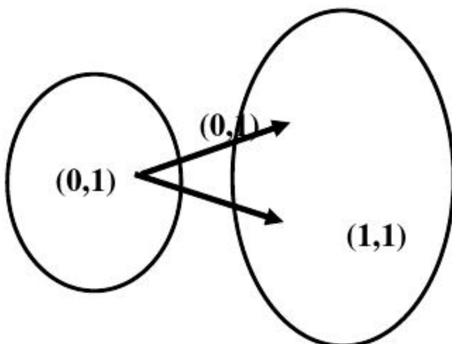
A **B**

____



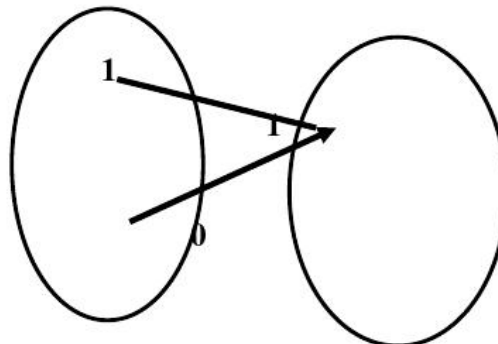
A **B**

____



A **B**

<______________________



A **B**

____

Determina cuáles de las siguientes relaciones representa a una función:

$R = \{ A \times B = (a,b) \mid A = N \quad B = \{1,2,3,4,5\}\}$			
RELACIÓN	**SI**	**NO**	**¿POR QUÉ?**
$R_1 = \{(-1,4),(3,9),(1,1)\}$			
$R_2 = \{\quad\}$			
$R_3 = \{(1,1)\}$			
$R_4 = \{(4,9)\}$			
$R_5 = \{(1,1),(1,3)\}$			
$R_6 = \{(-2,2),(2,2)\}$			
$R_7 = \{(2,2),(9,3),(103,1),(10,4)\}$			
$R_8 = \{(0,0),(3,0),(10,0)\}$			
$R_9 = \{(9,5),(5,0),(10,4)\}$			
$R_{10} = \{(1,1)(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$			

II.- CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO: Identificar, interpretar y analizar:

Determina cuáles de las siguientes relaciones representa a una función:

$R = \{ A \times B = (a,b,c) \mid A = Z \times N \quad B = Z^{+} \}$			
RELACIÓN	**SI**	**NO**	**¿POR QUÉ?**
$R_1 = \{(-1,1,1)\}$			
$R_2 = \{(-1,2,-3),(2,4,7)\}$			
$R_3 = \{(-1,1,9),(-1,1,4)\}$			
$R_4 = \{(3,2,1),(3,4,1)\}$			
$R_5 = \{(0,1,4),(-1,1,7),(2,4,9)\}$			
$R_6 = \{(-2,3,8),(3,9,7),(101,3,-4),(10,2,8)\}$			
$R_7 = \{(1,9,8),(1,9,6),(-1,4,5),(8,-7,6)\}$			
$R_8 = \{(0,0,0)\}$			
$R_9 = \{(-3,4,5),(3,9,8),(0,1,0)\}$			

En base a las siguientes propiedades contesta el siguiente cuadro:

1) Para cada elemento del conjunto *A* le corresponde un elemento del conjunto *B*.
2) No es posible que un elemento del conjunto de *A* esté asociado con dos o más elementos del conjunto *B*.

RELACION	***Conjunto***		***Cumple con las propiedades***	
	A	***B***	***1***	***2***
$f(x,y)=9x^2+9y^2$	$R \times R$	R^+		
	$R^- \times R^-$	R		
	$N \times Z^-$	N		
$x+y+z=1$	$R \times R^-$	N		
	R^2	R		
	$N \times N$	Q		
$z=ln\left(\frac{-4}{x+y}\right)$	$N \times N$	R		
	$\{-1,-2,-3,01,2,3\} \times \{-2,0,2\}$	R		
	$R^- \times R^-$	R		

De las siguientes figuras determina cuáles representan una función que va de IR xIR a los números reales IR:

FUNCIÓN	SI	NO	¿POR QUÉ?

PROBLEMAS DE CONTEXTO

ALGEBRA LINEAL: MATRIZ DE PRODUCCIÓN

Un fabricante hace 4 tipos de productos diferentes cada uno requiere 3 tipos de materiales.

La siguiente tabla denota el número de unidades de cada materia prima para trabajar unidad de producto:

		Productos			
		P1	**P2**	**P3**	**P4**
Material	**a**	2	1	3	4
	b	4	2	2	1
	c	3	3	1	2

Llamemos A la matriz de datos de productos y materiales; x el número de artículos fabricados de los 4 productos y b el número de unidades necesarias de los 3 materiales.

En notación matricial se realiza la operación $Ax =.b$

Si se producen cierto número de los 4 productos

¿Cuántas unidades de cada material se necesitan?

Determina la dimensión del conjunto de partida:___________________________________

Determina la dimensión del conjunto de llegada:___________________________________

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES: FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

PROTAC INC. Produce tres líneas de equipo pesado, una de estas líneas de productos llamada equipos de remoción de escombro se destina estrictamente a aplicaciones de construcción, la segunda de las líneas está destinada a la industria maderera y tercera de las líneas se destina al traslado de productos industriales.

El miembro más grande de la línea para remover escombro (**E-9**), el miembro mayor del equipo forestal (**F-9**) y el miembro más grande del equipo industrial (**I-9**) se producen en el mismo departamento y con el mismo equipo.

Haciendo uso de las predicciones económicas para el próximo mes, el gerente de mercadotecnia establece que durante el periodo será posible vender 5000 miembros E-9, 4,000 miembros F-9 y 2, 000 miembros I-9.

¿La producción de E-9, F-9 y I-9 pueden ser valores positivos, negativos o nulos (si/no)?___

Porque:____

____

¿Qué interpretación se le darían estos valores en cuanto a la producción?

i. Positivo significa que____
ii. Negativo significa que ____
iii. Nulo significa que ____

¿La ganancia económica puede ser positiva, negativa o nula (si/no)?____

Porque:____

____

¿Qué interpretación se le darían estos valores en cuanto a la ganancia de producción?

i. Positivo significa que ____
ii. Negativo significa que ____

iii. Nulo significa que ____

Establece una expresión algebraica que estima la ganancia del mes en base a la producción de los miembros E-9, F-9 y I-9.

Ganancia =   **+**   **+**

¿Es una función matemática? Si__ no__ Explica por qué:

____

____

Escribe el conjunto de partida:

____

Escribe el conjunto de llegada:

____

Entonces la función va de _____ a ______

ESTADÍSTICA ERROR DE MEDICION:

Cuando se mide se introducen errores en la medida. Existen dos tipos de errores el sistemático causado por defecto del instrumento, método o falla del observador y el accidental producido por causas fortuitas y accidentales donde no siempre tienen el mismo error absoluto.

Por ejemplo:

El error de un área rectangular de lado $a \pm e_{abs}$ y base $b \pm e_{abs}$ se determina como:

a

$$e_A = A\sqrt{(er_a)^2 + (er_b)^2}$$

b

Donde

A =es el área del rectángulo de dimensiones a por b.

er_i= es el error relativo del lado $i=\{a,b\}$ tal que $er_i = \frac{e_{abs}}{dimension\ exacto}$

El área del rectángulo será igual a $A \pm e_A$

APLICACIONES

Debido a la temperatura los metales se dilatan, se desea determinar el área de una lámina de metal cuyo error de la base es de 0.0015m y el error de altura es de 0.001m de tal manera que de un conjunto de láminas se seleccione aquella cuya área sea alrededor de 1.64 mts con un error mínimo.

INSTRUCCIONES



Consulta en páginas **web** sobre el tema de **"Errores de medición"**.

Abre el programa **Cabri Geometry**

Utiliza el archivo **lamina2.fig** lee cuidadosamente las instrucciones y contesta las siguientes actividades.

Realiza modificaciones sobre los valores de la altura y base.

Calcular las áreas de la siguiente tabla y completa:

Altura	**base**	**Área**	**Error**
1.5	1.1		
1.09	1.5		
1	1.51		
1.1	1.49		
1.07	1.49		

Contesta las siguientes preguntas:

1. Determina como es el conjunto de partida:
2. Determina como es el conjunto de llegada:

3. ¿Existen valores que determinen un mismo valor de área con el mismo error? Si___ no___
4. ¿Tienen las mismas dimensiones esos valores que dan la misma área? Si ____ no___
5. Existe una misma medida de dimensiones del rectángulo que proporcione dos áreas distintas:
6. Cumple con las propiedades de una función:
7. La expresión del área de un rectángulo ¿es función?

III. SINTETIZAR IDEAS PRINCIPALES

1. Revisa los apartados anteriores I y II, reflexiona y determina cuáles son las ideas principales que debes recordar para aplicar a cualquier nueva situación.

2. Escribe cuáles son esas ideas principales.

3. Escribe el concepto de relación para dos conjuntos cualesquiera. Señala sus características.

4. Escribe el concepto de función para dos conjuntos cualesquiera. Señala sus características.

5. Establece la diferencia entre relación y función para dos conjuntos cualesquiera.

6. Establece las diferentes representaciones de relación: gráfica, conjuntual, vínculo entre variables, diagrama de Venn, tablas, verbal en los problemas de contexto. En cada una de las representaciones señala las características del concepto.

7. Señala en cada uno de los ejemplos de I y II las características del concepto de relación en las diferentes representaciones.

8. Establece las diferentes representaciones de función: gráfica, conjuntual, vínculo entre variables, diagrama de Venn, tablas, verbal en los problemas de contexto. En cada una de las representaciones señala las características del concepto.

9. Señala en cada uno de los ejemplos de I y II las características del concepto de función en las diferentes representaciones.

10. Expresa los conceptos de dominio y recorrido de una relación y de una función para dos conjuntos cualesquiera. Señala la diferencia entre conjunto de partida y dominio, entre conjunto de llegada y codominio.

IV. ACCIONES EN EL AULA. SOLUCIÓN DE EJERCICIOS

1. Determina un subconjunto en el conjunto de partida y otro en el de llegada, para que la relación exista**.**

RELACION	CONJUNTO DE PARTIDA	CONJUNTO DE LLEGADA	SUBCONJUNTO DE PARTIDA	SUBCONJUNTO DE LLEGADA
$f(x,y)=\sqrt{xy}$	$x \in R \quad y \in R$	R		
$G(x,y)=x+y^2$	$x=\{-2,-1,0,1,2\}$ $y=\{-9,-4,0,4,9,10\}$	R		
$f(x,y)=(x+y)^2$	$x \in R \quad y \in R$	R		
$g(x,y)=ln\left(\frac{-4}{x+y}\right)$	$(x,y) \in R^2$	R^+		
$f(x,y)=\frac{8}{x-3y}$	$(x,y) \in R \times R$	R		

2. ¿Se pueden tener diferentes subconjuntos del conjunto de partida?
3. Si existe más de uno, ¿cuál es el dominio?
4. ¿Se pueden tener diferentes subconjuntos del conjunto de llegada?
5. Si existe más de uno, ¿cuál es el codominio?
6. Determina en base a los conceptos vistos, si las expresiones de la primera columna representan una relación, una función, una superficie.

7. ¿Una relación es una función? ¿Toda relación es una función? Justifica
8. ¿Una función es una relación? ¿Toda función es una relación? Justifica
9. ¿Una superficie es una relación? ¿Toda superficie es una relación? Justifica
10. ¿Una superficie es una función? ¿Toda superficie es una función? Justifica
11. Determina si las siguientes relaciones, cumplen con las propiedades de una función:

$t(x,y)=(x-y)^2 \quad (x,y)\in N\times N \quad t\in Z$			
FUNCIÓN	**SI**	**NO**	**¿POR QUÉ?**
$R_1=\{(1,1,0)\}$			
$R_2=\{(-1,2,9),(2,4,4)\}$			
$R_3=\{(1,1,3),(1,1,0)\}$			
$R_4=\{(3,2,1),(3,4,1)\}$			
$R_5=\{(0,1,1),(1,5,16),(6,4,4)\}$			

V. TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASES:

Consultar en un libro de cálculo diferencial e integral los siguientes conceptos:

1. Función de varias variables:
2. Dominio de una función de varias variables:
3. Imagen o recorrido de una función de varias variables:

4. ¿Se siguen cumpliendo las propiedades de la función de una variable para el caso de una función de varias variables? Explica

Completa la siguiente tabla partiendo del conjunto de llegada para (x, y) los números reales y conjunto de llegada el intervalo $[0,\infty)$.

Sea $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ tal que $(x, y) \in R \times R \quad z \in [0,\infty)$				
(x,y)	z	***z está definida para esos valores de x y y***		
		SI	***NO***	***¿POR QUÉ?***
(1,1)				
(2,-2)				
(2,2)				
(-4,0)				
(-3,1)				

a) ¿Cómo deben ser los valores de (x, y) para que esté definida la relación y que cumpla con las propiedades de una función?
b) ¿Cómo son los valores de z?
c) Halla el dominio de la función
d) Halla el codominio de la función
e) Señala las características de esta función a partir del concepto general

f) ¿Qué otras representaciones puedes dar de esta función?

g) Determina un conjunto de partida y uno de llegada para cada una de las siguientes relaciones de manera tal que la relación este determinada por un conjunto finito de puntos. Señala los casos que se tiene relación y los que son función.

Relación	**Conjunto de partida**	**Conjunto de llegada**
$z = x + y + 3$		
$f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$		
$f(x,y) = e^{2x+y}$		
$z = x^2 - \frac{y^2}{25}$		
$G(\theta,t) = sen(\theta - t)$		
$w(u,v) = \sqrt{8u} - v$		

VI. CONCLUSIÓN

CONCLUSION INDIVIDUAL

a) ¿Cómo se define el conjunto de partida de la función $f(x, y)$ de 2 variables independientes?____

____

b) ¿Cómo se define el conjunto de llegada de la función $f : R^2 \rightarrow R$?

c) Al cambiar los conjuntos de partida y llegada ¿se obtiene la misma función?
__si __no Explica

d) ¿Cómo se escribirá una función de *n* variables independientes a los números reales?

CONCLUSION GRUPAL

DEFINICION DE RELACION
DEFINICION DE FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

e) Haciendo una reflexión de toda la Hoja de Trabajo. Escribe el resumen que necesitas para responder a cualquier nueva situación que te presentemos

HOJA DE TRABAJO 4. DOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES.

OBJETIVOS:

- Explicar el concepto de función de varias variables.
- Analizar el concepto de una función de varias variables como una extensión del caso de una sola variable.
- Destacar la importancia que tienen el dominio y la imagen dentro de una función.
- Desarrollar la capacidad de encontrar el dominio e imagen de una función de varias variables.
- Desarrollar la habilidad para trabajar en grupo o en equipo.

PROBLEMA DETONANTE DE LA MOTIVACIÓN

Un circuito eléctrico funciona (la corriente pasa) si hay algún camino activado para ir desde el principio (A) hasta el final (B) del sistema de circuito. En una estructura en serie de la siguiente manera:



El funcionamiento del circuito se describe bajo la siguiente expresión:

$$C = x_1 x_2 x_3 x_4$$

Toma el valor de 1 cuando hay corriente y 0 cuando no hay corriente.

Contesta las siguientes preguntas:

a. Determina las variables independientes en el problema:

____

b. Determina la variable dependiente del problema.

____

c. ¿Qué valores pueden tomar las variables independientes?

d. ¿Qué valores puede tomar la variable dependiente?

e. ¿Cómo escribirías las variables independientes en términos matemáticos?

f. ¿Cómo escribirías la variable dependiente en términos matemáticos?

g. ¿Qué valores deberán tener las variables independientes para que el circuito funcione?____

____

h. ¿Qué pasa si uno de los componentes del circuito tiene valor igual a 0?

____

____

i. ¿Es necesario que todos los elementos del circuito estén funcionando para que funcione el circuito?____

____

j. ¿Existen valores que sean diferentes a 0 y 1 para el circuito? __si __no

k. La expresión matemática realmente describe el funcionamiento del circuito:
___si ___no. Explica por qué:_______________________________________

____

l. ¿Es función la expresión matemática del circuito? __si __no
Explica por qué ____

____

m. ¿Cuántas variables intervienen en el dominio de la función?_________________

n. ¿Cuáles son las variables del dominio?_________________________________

o. Escribe en términos matemáticos el dominio de la función:

$D_C = \{\ (___,___,___,___)$ ***tal que*** $___,___,___,___ \in \{\quad , \quad \}\}$

p. Escribe en términos matemáticos la imagen de la función:

$I_C = \{\ ___$ ***tal que*** $____ \in \{\quad , \quad \}\}$

q. Escribe algunos de los elementos del dominio de la función

r. Completa la siguiente expresión:

Sea $C = x_1 x_2 x_3 x_4$ tal que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in ___$ y $C \in I_c$

¿Crees que el concepto de función se puede aplicar a otro tipo de circuitos?

____

____

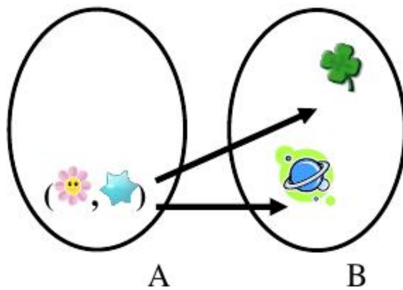
I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS A RECORDAR

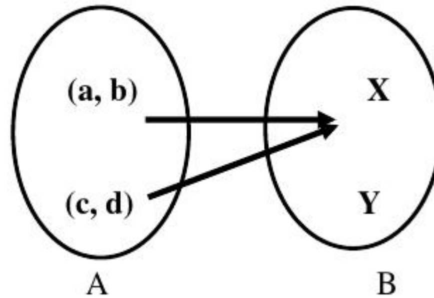
a. Escribe la definición de los siguientes conceptos:

1. ¿Cuáles son las propiedades fundamentales de una función?
2. ¿Cómo se define el dominio de una función de dos variables?
3. ¿Cómo es la imagen de una función de dos variables?
4. ¿Cómo se define una función de dos variables?

b. *Escribe en la línea si los siguientes Diagramas de Venn representan a una función considerando a: A conjunto dominio y B conjunto imagen.*

Justifica tu respuesta.





Si____ No___

Por qué:______________________

Si____ No___

Por qué:_______________________

Analiza las siguientes expresiones y determina cuales representan a una función:

Expresión	*Dominio*	*imagen*	*Si/ no*
$A = \pi r^2$	$r \in R$	$A \in [0, \infty)$	
$V = L^2 h$	$(L,h) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$	$V \in [0,\infty)$	
$y^2 - 6x = 0$	$x \in R$	$y \in R$	
$v = \frac{d}{t}$	$(d,t) R \times [0,\infty)$	$v \in R^-$	

Expresión	Dominio	imagen	Si/ no
$f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$	$x\in R$	$f(x)\in\{-1\quad 0\quad 1\}$	
$f(\theta,t)=tan(\theta)+t$	$\theta\in R-\left\{(2k-1)\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$ $t\in R$	$f(\theta,t)\in R$	
$F(x,y)=ln\left(\frac{y-9}{x^2-4}\right)$	$x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ $y\in(9,\infty)$	$F(x,y)\in R$	
$F(x,y)=ln\left(\frac{y-9}{x^2-4}\right)$	$x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ $y\in R-\{9\}$	$F(x,y)\in R$	
$F(x,y)=ln\left(\frac{y-9}{x^2-4}\right)$	$x\in(-2,2)$ $y\in(-\infty,9)$	$F(x,y)\in R$	
$f(\theta)=\begin{cases}sen(\theta) & x>0\\ cos(\theta) & x\leq 0\end{cases}$	$\theta\in R$	$f(\theta)\in R$	
$f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x-y^2}}$	$D_{f}=\left\{(x,y)\in R^2\ /\ x>y^2\right\}$	$f(x,y)\in R$	
$18x^2+36y=9$	$x=\left\{-4,-\frac{1}{2},0,,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right\}$	$y\in\left\{\begin{matrix}\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{6},\frac{1}{2},\\ \frac{\sqrt{2}}{4},0\end{matrix}\right\}$	

Grafica y señala la región determinada por la igualdad o desigualdad.

Ecuación	Gráfica
$x + y = 4$	
$x + y > 4$	
$x + y \geq 4$	
$x + y < 4$	

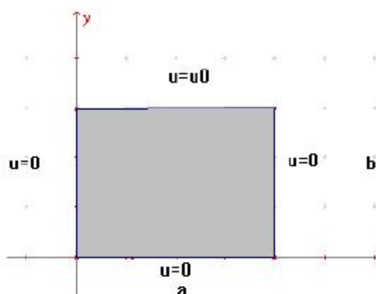
II. CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO. RETROALIMENTARSE DE LA HOJA ANTERIOR.

III. SINTETIZAR IDEAS PRINCIPALES. RETROALIMENTARSE DE LA HOJA ANTERIOR.

IV. ACCIONES EN EL AULA: SOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- **PROBLEMA DE CONTEXTO CONDUCCIÓN DEL CALOR**

Una placa rectangular de dimensiones a y b como se muestra en la figura, tiene sus caras planas aisladas. Tres de sus aristas se mantienen a una temperatura cero mientras que la cuarta se mantiene a una temperatura constante u_0 como se indica.



Muestre que la temperatura en estado estacionario esta dado por:

$$U(x,y) = \frac{2u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - \cos k\pi)\,sen(k\pi x/a)\,senh(k\pi y/a)}{k\,senh(k\pi b/a)}$$

¿Es función esta expresión? Justifica tu respuesta.

¿Cómo es el dominio de esta función?(continuo/discreto)

¿Cuáles son las variables del conjunto de dominio?

¿Los valores de x y y son positivos o negativos y que representan en la expresión?

¿Que representa el conjunto imagen de la función?

¿Cómo son estos valores? (continuos/discretos)

- **ESTADISTICA: SUPERFICIE DE RESPUESTA**

La siguiente tabla describe un experimento sobre la fabricación de un producto en el cual se hicieron variar dos factores. El tiempo de reacción en hrs y la temperatura en grados centígrados. Estos dos factores se codificaron como:

$\boldsymbol{x_1}$= tiempo (-12/8) $\boldsymbol{x_2}$=temperatura (-230/30) $\boldsymbol{y}$= rendimiento.

N° corridas	x_1	x_2	y
1	-1	0	83.8
2	1	0	81.7
3	0	0	82.4
4	0	0	82.9
5	0	-1	84.7
6	0	1	75.9
7	0	0	81.2
8	-1.414	-1.414	81.3
9	-1.414	1.414	83.1
10	1.414	-1.414	85.3
11	1.414	1.414	72.7
12	0	0	82.0

El modelo de ajuste de los datos se describe a través de la superficie:

$$\hat{y} = 79.947 - 1.115\hat{x}_1 - 4.208\hat{x}_2 + 1.801\hat{x}_1\hat{x}_2 + 5.707\hat{x}_1^2 \quad - 5.743\hat{x}_2^2$$

Los datos del conjunto dominio ¿son continuos o discretos?

____

Los datos del conjunto dominio que variables representan en el contexto:

____

Los datos del conjunto imagen ¿Es continua o discreta?

____

Los datos del conjunto imagen que representan

____

¿Es función la expresión de la superficie de ajuste?

____

- **FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN**

La **función Cobb-Douglas** es una forma de función de producción, ampliamente usada para representar las relaciones entre un producto y las variaciones de los insumos tecnología , trabajo y capital. Fue propuesta por Knut Wicksell (1851-1926) e investigada con respecto a la evidencia estadística concreta, por Charles Cobb y Paul Douglas en 1928. Douglas solicitó a Cobb establecer una función que resultara en participación constante de los dos factores si ganaban en su producto marginal.

Esta función de producción presenta la forma $Q = A * T^{\alpha} K^{\beta}$

Donde:

Q = producción total (el valor monetario de todos los bienes producidos durante un año)

T = trabajo insumo

K = capital insumo

A = factor total de productividad

α and β son las elasticidades producto del trabajo y el capital, respectivamente.

Estos valores son constantes determinadas por la tecnología disponible.

INSTRUCCIONES



Para realizar esta actividad deberás consultar a través de páginas web o libros de administración sobre **"Función de producción de Cobb - Douglas"**.

Visita la pagina web:

http://www.fgn.unisg.ch/eurmacro/tutor/cobb-douglas-es.html.

Contesta las siguientes preguntas:

Realiza una síntesis del tema **Función de producción de Cobb – Douglas**

¿La función de producción de Cobb- Douglas cumple con la definición de una función matemática? Justifica tu respuesta

Señala las variables que representan el dominio de la función.

Señala las variables que representan la imagen de la función.

Discute con tus compañeros tus ideas y escribe la conclusión a la que llegaron:

Entra a la página web **http://www.fgn.unisg.ch/eurmacro/tutor/cobb-douglas-es.html.**

Analiza su grafica y contesta las siguientes preguntas:

¿Cómo es el comportamiento de la función?

____

Dibuja lo que observaste:

Analiza el siguiente caso:

La función de producción de una empresa se describe a través de la siguiente expresión matemática

$$Q=3k^{1/2}t^{1/4}$$

Los valores del dominio pueden ser negativos bajo el contexto de la función de producción:

____

Los valores del dominio pueden ser negativos bajo el contexto matemático:

____

Que implicaría que los valores del dominio fueran nulos en el contexto del problema:

____

Los valores de la imagen pueden ser nulos:

____

Los valores de la imagen pueden ser negativos en el contexto del problema y que implicaría:

____

El valor de la imagen en el contexto real puede ser negativo:

____

¿Cómo es el comportamiento de la función de producción? Grafica en winplot la función.

____

Si la función de producción no puede ser mayor a 729 unidades que valores deberán tener k y t para cumplir con esta especificación.

La función de costos de producción está determinada como

$$c(k,t)=2k+3t$$

Bajo la condición de no pasar de 728 unidades.

¿Cómo deben ser los valores de k y t para cumplir esta condición?

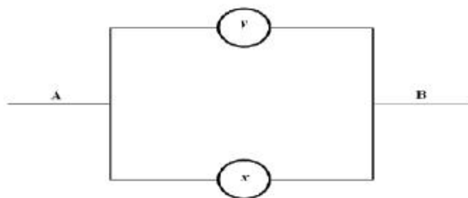
____

¿La función de costos cumple con las propiedades de una función matemática?

____

- **CIRCUITO ELÉCTRICO**

El sistema del circuito eléctrico funciona si hay un camino activado para ir del punto inicial (A) al punto final (B). Siguiendo un circuito eléctrico paralelo como el siguiente:



El funcionamiento del circuito se describe bajo la siguiente expresión:

$$f(x,y)=1-(1-x)(1-y)$$

Toma el valor de 1 cuando hay corriente y 0 cuando no hay corriente.

Contesta las siguientes preguntas:

Determina las variables independientes en el problema:

____

Determina la variable dependiente del problema.

____

¿Qué valores pueden tomar las variables independientes?

¿Qué valores puede tomar la variable dependiente?

Escribe un conjunto de partida para el circuito eléctrico paralelo

Escribe un conjunto de llegada para el circuito eléctrico paralelo

¿Cuántas variables intervienen en el dominio de la función?_________________________

¿Cuáles son las variables del dominio?____

Escribe el dominio de la función del circuito eléctrico:

$$D_f = \{ \ (___,____) \text{ tal que } ____,____ \in \{ \quad , \quad \} \}$$

Escribe los valores del dominio de las variables del circuito eléctrico:

Ejemplo:

1) Cuando no hay energía en ninguno de los elementos del circuito quiere decir que

   x=0 y y= 0 entonces el punto seria (0,0).

2)

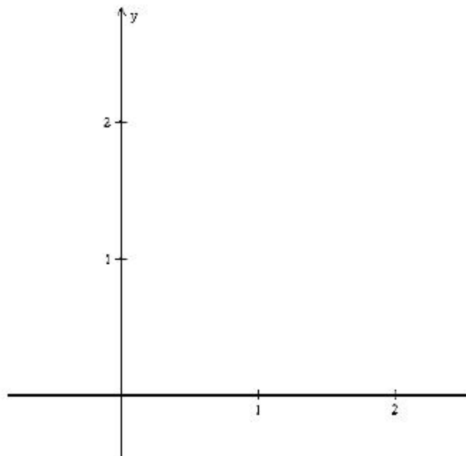
3)

4)

Escribe los valores que se obtienen para el dominio del circuito eléctrico:

Df={ (0,0),(__,__),(__,__),(__,__)}

Grafica el dominio de la función, es decir los puntos *(x,y)*:



Evalúa los puntos del dominio en la función $f(x,y)=1-(1-x)(1-y)$ e interpreta su resultado:

x=0 y=0	$f(0,0)=1-(1-0)(1-0)=1-1=0$	**el circuito está** ___________
x=1 y=0		**el circuito está** ____________
x=0 y=1		**el circuito está** ___________
x=1 y=1		**el circuito está** ____________

¿Es necesario que todos los elementos del circuito estén funcionando para que funcione el circuito? __si __no

____

¿Qué pasa si uno de los componentes del circuito esta encendido y el otro está apagado?____

Bajo que condición se da que el circuito este apagado.

____

¿Existen valores que sean diferentes a 0 y 1 para el circuito?______________________

¿Cuántas variables intervienen en la imagen o recorrido de la función?________________

¿Cuáles son las variables de la imagen o recorrido?______________________________

Escribe algunos de los elementos de la imagen o recorrido de la función

Escribe en términos matemáticos la imagen de la función:

$I_C = \{$ ___ *tal que* ____ $\in \{ \quad , \quad \}\}$

Completa la siguiente expresión:

$$f(x,y) = 1-(1-x)(1-y) \text{ tal que } (x,y) \in ___ \text{ y } f(x,y) \in I_c$$

La expresión matemática realmente describe el funcionamiento del circuito:

_si _no Explica porque: ____

¿Es función la expresión matemática del circuito? __si __no Explica porque

____

¿Crees que el concepto de función se puede aplicar a otro tipo de circuitos?

____

La función es: __continúa __discreta

I N S T R U C C I O N E S
Completa la siguiente tabla realizando lo que se te pide: En siguientes figuras marca con una **X** cuando el elemento del circuito está **apagado** y **rellena** el circulo cuando este **encendido**; marca con **color rojo** el **recorrido de la electricidad** según cada caso. Realiza una interpretación del funcionamiento del circuito paralelo.

Caso	Valores *(x, y)*	Representación grafica del funcionamiento del circuito	Valor *f(x,y)*	Interpretación del funcionamiento del circuito Eléctrico
Encendido *x* Encendido *y*				
Apagado *x* Encendido *y*				
Encendido *x* Apagado *y*				
Apagado *x* Apagado *y*				

INSTRUCCIONES



Para realizar esta actividad hay que entrar a **winplot** en la opción de **ventana** seleccionar **3-dim**.

En la ventana de **3-dim** selecciona **Ecua** posteriormente la opción de **punto – cartesiana** teclea cada elemento del punto que se desea graficar.

En caso de ser un punto en el plano *(x, y)*, *(x, z)* o *(y, z)* el valor de la coordenada que falte será igual a *0.* El color del punto se puede modificar haciendo clic en color y seleccionar el color deseado y después cerrar.

Gráfica utilizando **Winplot** los puntos *(x,y)* del dominio de la función que describe el funcionamiento del circuito en la ventana de **3-dim**. Cambiales el color de manera que todos los puntos del dominio sean en color rojo.

Dibuja la grafica como la que obtuviste en **Winplot**.

Abre una ventana nueva en **Winplot** y dibuja la grafica de los puntos de la función que describe el funcionamiento del circuito en la ventana de **3-dim** (x,y,z)

I N S T R U C C I O N E S



Para realizar esta actividad hay que entrar a **winplot** en la opción de **ventana** seleccionar **2-dim**.

En la ventana de **2-dim** selecciona **Ecua** posteriormente la opción de **3.implícita F3** teclea la expresión como una ecuación, en caso de ser una desigualdad regresa a la opción de **Ecua** y selecciona ahora la opción de **desigualdades**. En la ventana de **regiones implícitas** pulsar el botón **cambiar = en <** o bien **cambiar = en >.**

Utilizando winplot grafica las siguientes igualdades o desigualdades.

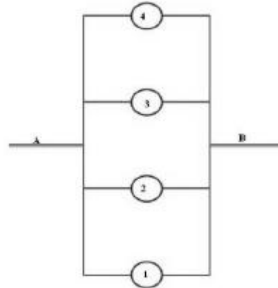
ECUACIÓN	GRÁFICA
$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$	
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1$	
$x^2 - y^2 \leq 1$	

Dadas las siguientes relaciones determina su dominio e imagen para que sean funciones y grafica su dominio utilizando winplot.

RELACIÓN	DOMINIO	IMAGEN	GRAFICA DEL DOMINIO
$S(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2-1}}{x}$			
$f(x,y)=ln(x+y-5)$			
$G(x,y)=7x+y-2$			
$S(x,y)=\frac{y}{x-2}$			
$f(x,y)=x^2+y^2$			

V. TRABAJO INDEPENDIENTE.

El sistema del circuito eléctrico funciona si hay un camino activado para ir del punto inicial (A) al punto final (B). Siguiendo un circuito eléctrico paralelo como el siguiente:



El funcionamiento del circuito se describe bajo la siguiente expresión

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)$$

Toma el valor de 1 cuando hay corriente y 0 cuando no hay corriente.

Contesta las siguientes preguntas:

Establece el dominio de la función:

Establece la imagen de la función:

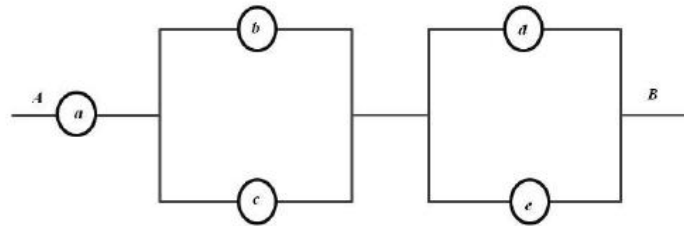
Es necesario que todas variables del circuito estén con corriente para que funcione el circuito?
__si __no Explica porque: ____

¿Cuántas variables intervienen en el dominio de la función?_________________________

¿Cuántas variables intervienen en la imagen de la función?__________________________

¿Es continua o discreta la función?____

Si ahora el circuito eléctrico cambiara su forma a la siguiente



Su funcionamiento se describe bajo la siguiente expresión:

$$f(a,b,c,d,e)=a[1-(1-b)(1-c]\,[1-(1-d)(1-e)]$$

Completa las siguientes preguntas:

Establece el dominio de la función:

Establece la imagen de la función:

Es necesario que todos los elementos estén encendidos para que funcione el circuito.

Explica: ____

El punto ***a*** ¿siempre tiene que estar encendido para que funcione el circuito? _si _no

Explica: ____

Para que el circuito funcione ¿tendrá que estar el elemento ***a*** y otro diferente encendido?

_si __no Explica: ____

¿Cuántas variables intervienen en el dominio de la función?_________________________

¿Cuántas variables intervienen en la imagen de la función?__________________________

¿Es continua o discreta la función?____

Supongamos que tenemos una placa metálica de grandes dimensiones. La temperatura (en grados centígrados) de la placa está en función a las coordenadas de cada uno de sus puntos.

$$T(x, y) = 500 - 0.6x^2 - 1.5y^2$$

Establece el dominio de la expresión de la temperatura de la placa.

Es posible obtener valores negativos para el dominio: __si __no

Explica ____

____

Establece la imagen matemática de la expresión de la temperatura de la placa.

Establece la imagen de la expresión según el contexto del problema.

¿Que significaría tener una temperatura negativa según el contexto del problema?

____

¿Qué significa tener valores de x y y negativos?

____

Establece el dominio e imagen de las siguientes funciones y realiza el grafico del dominio y de la función.

Función	Dominio	Imagen
$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^4}$		
$f(x,y)=\sqrt{xy}$		
$f(x,y)=2\ln(x)+\ln(y)$		
$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$		
$f(x,y)=\ln\left(\dfrac{y}{x+y^2}\right)$		
$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^3}$		
$f(x,y)=\sqrt{-xy}$		
$f(x,y)=2\ln(-x)+\ln(-y)$		
$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x-y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 3 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$		

VI. CONCLUSIÓN

CONCLUSIÓN INDIVIDUAL

¿Cómo se define una relación entre dos conjuntos cualesquiera?

____

____

¿Cómo defines una función de varias variables?___________________________________

____

¿Todas las relaciones son funciones?   Si___ No___

Porque:____

____

¿Cuáles son las propiedades deben cumplir las relaciones para ser una función?____

____

¿Todo gráfico representa a una función? ¿Por qué?

____

____

¿Es igual el conjunto de partida de la función que el dominio para cualquier función?

Justifica tu respuesta ____

____

¿Es igual el conjunto de llegada que su imagen para cuales quiera función?

Justifica tu respuesta ____

¿Cómo debe ser el dominio de una función en relación (mayor, menor o igual) a su conjunto de partida? ____

¿Cómo debe ser la imagen de una función en relación (mayor, menor o igual) a su conjunto de llegada ____

Siempre el dominio e imagen de una función en matemáticas es igual al dominio e imagen de la vida real ¿Por qué?____

____

¿Las funciones matemáticas tienen aplicaciones fuera del contexto matemático?

____

____

¿Cuándo una función es continua?

____

____

¿Cuándo una función es discreta?

____

____

¿Existen funciones de varias variables aplicadas en el contexto real?

____

____

¿Crees que se deberían poner más problemas de contexto real de acuerdo al área de estudio?

____

CONCLUSIÓN GRUPAL

DEFINICION DE RELACIÓN DE VARIAS VARIABLES

DEFINICION DE FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

DEFINICION DE DOMINIO DE VARIAS VARIABLES

DEFINICION IMAGEN DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

HOJA DE TRABAJO 5. DERIVADA DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

OBJETIVOS:

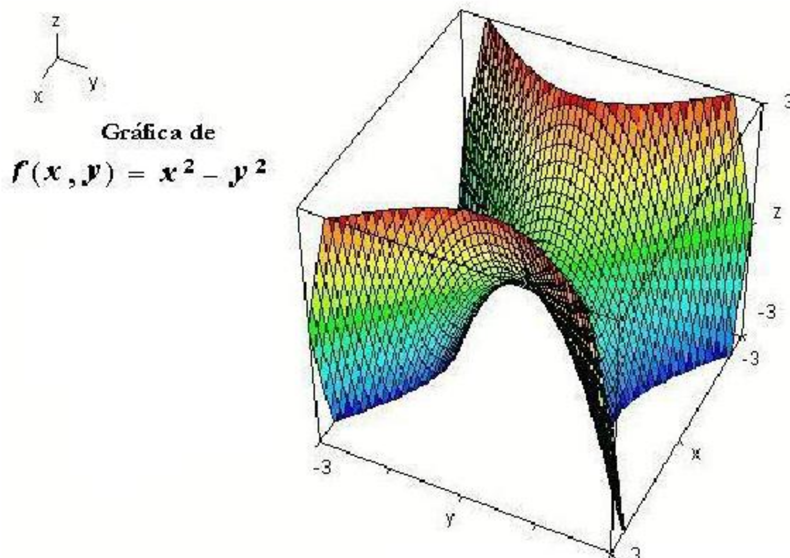
- Explicar el concepto de derivada de una función de varias variables.
- Analizar el concepto de derivada de una función de varias variables como una extensión del caso de una sola variable.
- Interpretar el concepto de derivada de una función de varias variables
- Desarrollar la capacidad de utilizar el concepto de derivada de una función de varias variables en aplicaciones.
- Desarrollar la habilidad para trabajar en grupo o en equipo.

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS A RECORDAR

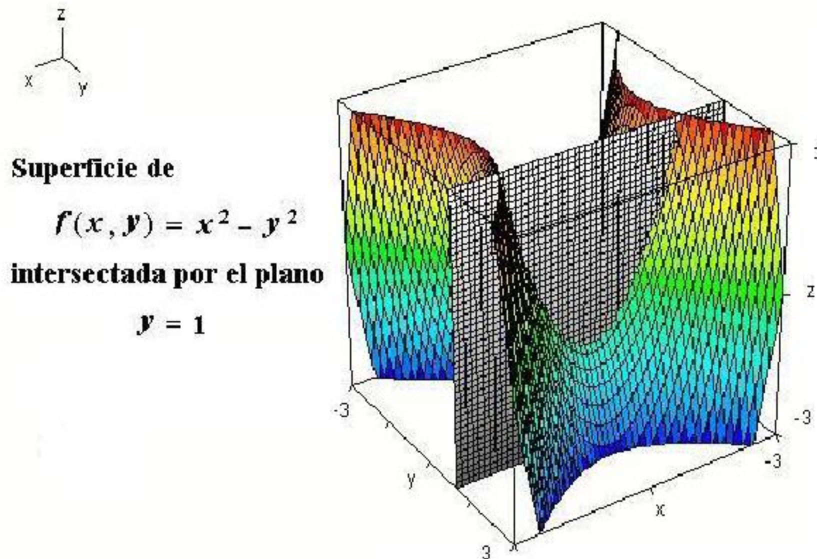
1. Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x,y) en D le corresponde un único número real $f(x,y)$, se dice que f es una función de x y y. El conjunto D es el dominio de f y el correspondiente conjunto de valores $f(x,y)$ es el recorrido de f.

   La gráfica de una función de dos variables $z = f(x,y)$ es una superficie en el espacio.

   Considera la superficie de la función $z = f(x,y) = x^2 - y^2$



El plano $y = y_0 = 1$ intersecta esta superficie en la curva $f(x,y_0)$



Observa que al intersectar la superficie con el plano se obtiene una parábola, de ecuación $z= x^2-1$

Explica el significado geométrico de la derivada de esta función en un punto de la curva y escribe su expresión matemática.

Analiza las diferentes formas en que un plano puede cortar a la superficie y las direcciones de dichos planos. ¿De qué forma se podría expresar el incremento de la función para cada plano?. ¿Cómo podrías expresar el concepto de derivada de esas funciones? Explica a los compañeros de equipo el análisis hecho por ti. Redacten una conclusión grupal.

II. CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO: IDENTIFICAR, INTERPRETAR Y ANALIZAR

DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Sea f una función real de n variables ($f : \text{IR}^n \to \text{IR}$) con dominio $D \subseteq \text{IR}^n$. Entonces el concepto general de derivada depende de la dirección en que se determine el incremento de la variable. Por esa razón se define:

> Si f es una función de IR^n en IR con dominio abierto $D \subseteq \text{IR}^n$; $\overline{x_0} \in D$ y
>
> $\vec{u} \in \text{IR}^n$ (dirección). Se llama ***derivada de f en $\overline{x_0}$ según la dirección $\vec{u}$*** al límite
>
> $$D_{\vec{u}} f(\overline{x_0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x_0}+h\vec{u})-f(\overline{x_0})}{h}$$
>
> si este existe y es finito.

> En el caso particular de $f : \text{IR}^2 \to \text{IR}$ es entonces $\overline{x_0} = (x_0, y_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y
>
> $D_{\vec{u}} f(\overline{x_0})$.=

Ejemplo 1: Sea dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ definida para todo par $(x, y) \in \text{IR}^2$ y sea

$\vec{u} = (1,1)$ Entonces

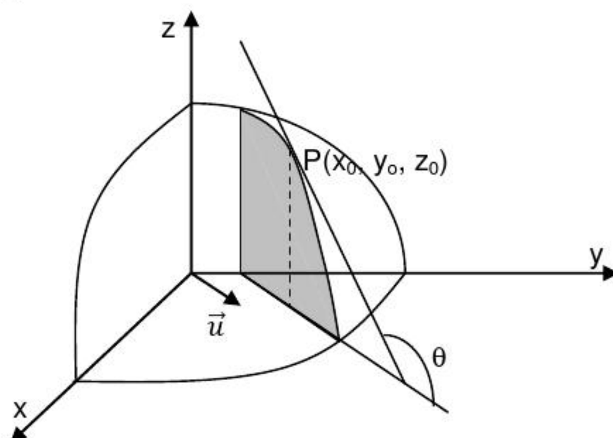
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h(x_0 + y_0 + h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2(x_0 + y_0 + h) = 2(x_0 + y_0).$$

Luego, se tiene que la derivada de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la dirección del vector $\vec{u}$ **= (1,1)** en el punto $(x, y) \in \text{IR}^2$ es

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = 2(x + y).$$

Interpretación geométrica de la derivada direccional



En la figura se observa que $D_{\vec{u}}f(x,y) = \tan\theta$ es decir, en general la derivada direccional de una función $z = f(x, y)$: $\text{IR}^2 \rightarrow \text{IR}$ en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{u}} \in \text{IR}^2$ en el punto $(x_0, y_0) \in Dom f$ es la pendiente de la recta tangente en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a la curva formada por la intersección de la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ con el plano perpendicular a xy y paralelo al vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ que contiene a $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

DERIVADAS PARCIALES

Las derivadas parciales constituyen un caso particular de derivada direccional al tomar como dirección a los vectores canónicos (1, 0) y (0, 1) en el caso de funciones de IR^2 en IR.

Definición :

Sean la función f : $\text{IR}^2 \rightarrow$ IR con dominio $D \subseteq \text{IR}^2$; $(x_0, y_0) \in D$ y $h \neq 0$ tal que $(x_0h, y_0) \in D$ y $(x_0, y_0h) \in D$.

Llamamos ***derivada parcial de*** f ***respecto a*** x ***(respecto a*** y***)*** al límite

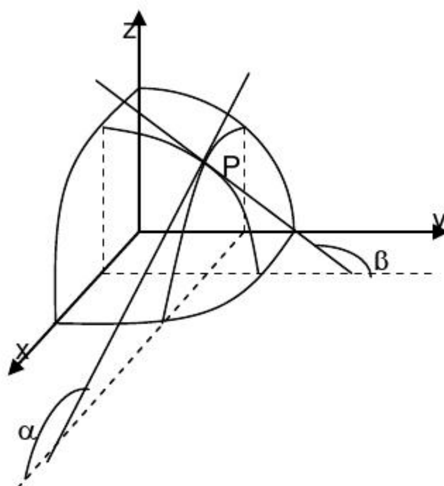
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este existe y es finito.

Es fácil comprobar que la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{\imath}$ no es más que la derivada parcial respecto a x y que la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{\jmath}$ no es mas que la derivada parcial respecto a y.

Interpretación geométrica de las derivadas parciales



Como caso particular de la derivada direccional, en la figura se observa que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta,$$

es decir, que la derivada parcial respecto a x de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) es la pendiente de la recta tangente en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a la curva formada por la intersección de la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ con el plano perpendicular a xy y paralelo al eje x, que contiene a $P_0(x_0, y_0, z_0)$, mientras que la derivada parcial respecto a y es la pendiente de la recta tangente en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a la curva formada por la intersección de la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ con el plano perpendicular a xy y paralelo al eje x.

Por otra parte, analizando la definición se observa que:

Para derivar a $z = f(x, y)$ respecto a x, suponemos que y es constante y derivamos z como función de la variable x y al derivar respecto a y consideramos a la x constante.

La derivada en funciones de dos variables

Derivadas de una Función de Dos Variables

Si en la función $z = f(x,y)$ la variable y se mantiene constante, digamos $y = y_0$ entonces z se convierte en función de una sola variable. La derivada parcial de f respecto a x, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}$, es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y_0) - f(x, y_0)}{h}$$

En forma similar, la derivada parcial de f respecto a y es

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y+h) - f(x_0, y)}{h}$$

Ejemplo:

Halle $\frac{\partial f}{\partial x}$ de $f(x,y) = x^2y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 y^3 - x^2 y^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 y^3 + 2xhy^3 + h^2 y^3 - x^2 y^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xhy^3 + h^2 y^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2xy^3 + hy^3 = 2xy^3$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y_0) - f(x, y_0)}{h}$$

indica el valor de la pendiente a lo largo de dicha curva.

Ejemplo: Hallar las derivadas parciales de:

a) $f(x, y) = x^3 y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y$

b) $z = e^{x^2 y} + x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\, e^{x^2 y} + 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^{x^2 y}$$

EJERCICIOS :

I. 1. ¿Cuál será el ángulo que forma con la dirección positiva del eje y, la recta tangente a la curva determinada por la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $x = 1$ en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$?

2. El paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ se intercepta con el plano $x = 1$ determinando una parábola. Calcule la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 2, -4)$.

3. Halle la pendiente de la curva de intersección del plano $y = 2$ y el paraboloide $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ en el punto $(1, 2, 2)$.

II. Calcule las derivadas parciales de:

1. $f(x, y) = x^4 - 4x^2 y^2 + y^4$
2. $z = x^y$
3. $z = \ln \sqrt{xy} + x^2$
4. $f(x, y) = \frac{1}{y} \cos x^2$
5. $z = tg\, \frac{x^2}{y}$
6. $z = arc\,tg\, e^{x y^2}$
7. $z = arc\,sen \sqrt{x^3 - y^2}$
8. $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x + y^2}}$
9. $f(x, y) = \ln sen \left(\frac{x + 2}{\sqrt{y}} \right)$
10. $z = \sqrt[3]{sen\left(x^2 y + y^2\right)}$
11. $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}$
12. $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$

III. Demuestre que:

1. $\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si $f(x, y) = arc\,tg\left(x^2 - y^2\right)$

2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$ si $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$

3. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=(x+y+z)^2$ si $u=x^2y+y^2z+z^2x$

4. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=(n-2)u$ si $u=\dfrac{Ax^n+By^n}{Cx^2+Dy^2}$

El siguiente teorema muestra la relación entre continuidad y derivabilidad en el caso de las funciones de varias variables.

Teorema :

Si existen las derivadas parciales de $z=f(x,y)$ en una vecindad de (x_0,y_0) y estas son continuas en (x_0,y_0), entonces la función $z=f(x,y)$ es continua en (x_0,y_0).

Aquí es importante destacar la importancia de exigir la continuidad de las derivadas parciales y no sólo su existencia, pues por ejemplo, la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

no es continua en el punto (0,0), pues

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)-f(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)=0\,.$$

Sin embargo, sus derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0\,,$$

(aunque son discontinuas) existen en el punto (0,0),

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Hemos visto que las primeras derivadas parciales de las funciones de varias variables eran a su vez funciones de varias variables. Por lo que podemos analizar si estas nuevas funciones son derivables respecto a cualquiera de sus variables. Al derivarlas obtenemos las llamadas derivadas de segundo orden de la función original. Luego, si estas son derivables, podemos seguir derivándolas y así sucesivamente.

Veamos la forma de proceder:

Sea $z = f(x, y)$.

Las primeras derivadas se denotan como

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Las segundas derivadas son entonces

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{(que se llaman puras) y}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{(que se llaman mixtas o cruzadas).}$$

Si estas funciones son derivables, se obtendrán las terceras derivadas o derivadas de tercer orden y así sucesivamente. El número de derivadas parciales de orden *n* será 2^n.

Si la función es de más de dos variables se procede de forma similar.

Ejemplo : Calcule las derivadas parciales de segundo orden de $z = x^3 y - 3x^2 y^3$.

Las primeras derivadas son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - 6xy^3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 9x^2 y^2,$$

por lo que las segundas derivadas serán

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy - 6y^3 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -18x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 - 18xy^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 - 18xy^2.$$

En este caso podemos observar que las derivadas mixtas son iguales. Esto no ocurre en general. El siguiente teorema que plantea bajo qué condiciones ello ocurre:

Teorema : (SCHWARTZ)

> Sea $z = f(x, y)$ una función definida en una vecindad del punto (x_0, y_0). Sean las derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} también definidas en esta vecindad y supongamos que f_{xy} y f_{yx} son continuas en el punto (x_0, y_0) Entonces se cumple
>
> $$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Este teorema es muy útil pues conociendo que las derivadas cruzadas son continuas en un punto, sabemos que ellas son iguales.

EJERCICIO :

I. Halle $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ si

1. $f(x, y) = x^3 - 4xy + 5y^2$
2. $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$
3. $f(x, y) = sen\left(x^2 - y^2\right)$
4. $f(x, y) = e^x \ln y + sen\, y \ln x$
5. $f(x, y) = e^x\left(\cos y + x\, sen\, y\right)$
6. $f(x, y) = tg\, x\, sen\, y$

II. 1 Pruebe que $z = arc\,tg\,\dfrac{y}{x}$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

2. Si $z = \ln\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right]$, demuestre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

3. Si $z = x\cos\dfrac{y}{x} + tg\,\dfrac{y}{x}$, demuestre que $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

4. Si $z = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$, demuestre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

5. Si $z = \dfrac{x^2 y^2}{x + y}$, demuestre que $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial z}{\partial x}$

6. Si $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, demuestre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

III. Halle las derivadas parciales indicadas

1. $f(x,y)=x^2y^3-2x^4y;\quad f_{xxx}$

2. $f(x,y)=e^{xy^2};\quad f_{xxy}$

3. $f(x,y)=tg\ x\ sen\ y;\quad f_{xxy}$

4. $f(x,y)=e^x\ln y+3x;\quad f_{xyy}$

5. $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2};\quad f_{xyy}$

6. $f(x,y)=e^x(\cos y+x\ sen\ y);\quad f_{xxy}$

7. $f(x,y,z)=x^5+x^4y^4z^3+yz^2;\quad f_{xyz}$

8. $f(x,y,z)=e^{xyz}-xy^2;\quad f_{xyz}$

9. $f(x,y,z)=sen(3x-yz);\quad f_{xxyz}$

10. $f(x,y,z)=xz^2\ln y+xz^3;\quad f_{xzzy}$

GRADIENTE Y DERIVADA DIRECCIONAL

Veamos ahora un método práctico para calcular la derivada direccional. Dicho método se basa en el concepto de gradiente que estudiaremos a continuación.

Definición :

Sea $f:\mathrm{IR}^n\to\mathrm{IR}$ derivable con dominio abierto $D\subseteq\mathrm{IR}^n$; $\overline{x_0}\in D$. Llamamos ***gradiente de*** f ***en el punto*** $\overline{x_0}$ al vector

$$grad\ f(\overline{x_0})=\nabla f(\overline{x_0})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x_0}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x_0}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x_0})\right).$$

Ejemplo : Halle el $grad\ f(1,2)$, si $f(x,y)=x^2y^2$.

Aquí es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4 .$$

Por lo que

$$grad\, f(1,2) = 8\vec{i} + 4\vec{j} .$$

Este teorema nos ofrece un método práctico para el cálculo de la derivada direccional a partir del gradiente.

Teorema :

La derivada de $w = f(x,y,z)$ en el punto P y en la dirección de $\vec{u}$ $\left(|\vec{u}| = 1\right)$ es igual a la proyección del gradiente sobre la dirección en el punto, es decir

$$D_{\vec{u}} w(P) = |\, grad\, w(P)\, | \cos\varphi .$$

Como en el teorema se exige que sea $|\vec{u}| = 1$, entonces podemos escribir

$$D_{\vec{u}} w(P) = |\, grad\, w(P)\, | |\vec{u}| \cos\varphi .$$

Por lo tanto, la derivada direccional se puede expresar como el producto escalar

$$D_u w(P) = grad\ w(P) \bullet \vec{u} .$$

De aquí se deduce también el siguiente resultado:

Sea $w = f(x,y,z)$ una función diferenciable. La derivada direccional de la función en el punto P alcanza su valor máximo cuando $\vec{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente y dicho valor máximo es igual a $|\, grad\, w(P)\, |$.

Ejemplo :

1. Calcule la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2$ en el punto (1, 1, -1) en la dirección del vector $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

   Calculemos las derivadas en el punto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,-1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,-1) = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,-1) = -2\,.$$

Entonces es

$$grad\, f(1,1,-1) = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

El vector $\vec{v}$ no es unitario ya que $|v| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, por lo que se toma como dirección el vector

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}\,.$$

Finalmente se obtiene

$$D_u f(1,1,-1) = \left(2i - 4\vec{j} - 2\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right) = \frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\,.$$

2. Calcule la derivada direccional máxima de $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2$ en el punto $(1,1,-1)$

Aplicando el resultado arriba planteado se obtiene que el valor máximo de la derivada direccional se alcanza en la dirección del vector $grad\, f(1,1,-1) = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$ y es igual a

$$D_{grad f} f(1,1,-1) = \left|2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\,.$$

III. SINTETIZAR IDEAS PRINCIPALES

1. Revisa los apartados I y II, busca todos los conceptos, teoremas y resultados importantes. Escríbelos en forma sintetizada.

2. Explica la relación entre derivada de una función de una variable y derivada direccional. ¿Puede considerarse como un caso particular de la derivada direccional? Argumenta tu respuesta.

3. Explica la relación entre derivada direccional y derivadas parciales.

4. ¿Cómo se calcula la derivada direccional?

5. ¿Cómo interpretas geometricamente la derivada direccional?

6. ¿Qué relación existe entre el gradiente de una función en un punto y la derivada direccional? Representa ambos geometricamente.

7. Explica el significado de cada uno de los teoremas enunciados anteriormente.

8. ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional? Justifica la respuesta.

9. ¿En qué dirección es nula la derivada direccional? Justifica la respuesta.

IV. ACCIONES EN EL AULA. SOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EJERCICIOS :

i) Determine el gradiente de la función en el punto que se indica

1. $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2,\ P(1,1)$

2. $f(x,y) = sen\, x + e^{xy},\ P(0,1)$

3. $f(x,y,z) = x\, sen\, yz,\ P(1,3,0)$

4. $f(x,y,z) = e^y \ln x + e^z \ln y;\ P(1,1,0)$

ii) Determine la derivada direccional de la función en el punto dado y en la dirección $\vec{u}$ (unitario)

1. $f(x,y) = x^3 - 4x^2y + y^2, P(0,-1), \vec{u} = \frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}$

2. $f(x,y) = e^x \sin y, P(1,\frac{\pi}{4}), \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$

3. $f(x,y) = e^x sen\, y;\ P\left(1,\frac{\pi}{4}\right),\ \vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

4. $f(x,y,z) = xy^2z^3,\ P(1,-2,1),\ \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$

5. $f(x,y,z) = x\,y + y\,z^2 + x\,z^3,\ P(2,0,3),\ \vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

iii) Determine la derivada direccional de la función en el punto dado y en la dirección que se indica

1. $f(x,y) = x^2y^3 - 4y,\ P(2,-1),\ \vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$

2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy,\ P(2,1),\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

3. $f(x,y)=e^{xy}+sen\,x,\ \ P(0,1),\ \ \vec{v}=2\vec{i}+2\vec{j}$

4. $f(x,y)=\sqrt{x-y},\ \ P(5,1),\ \ \vec{v}=12\vec{i}+5\vec{j}$

5. $f(x,y,z)=\ln x+e^{y}+sen\,z,\ \ P(e,10),\ \ \vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

iv) Si $f(x,y)=x\,e^{y}$, determine la derivada direccional máxima en el punto $P(2,0)$ y en la dirección de P a $Q(1/2,2)$.

v) Calcule la derivada direccional de $w=x^3+2x^2y+zy^2+z^2$ en el punto $P(1,2,-1)$ y en la dirección que va desde P a $M\left(4,4,-1+\sqrt{3}\right)$.

vi) Calcule la derivada direccional de $w=4e^{2x-y+z}$ en el punto $P(1,1,-1)$ y en la dirección que va desde P a $M(-3,5,6)$.

vii) Determine la derivada direccional máxima de f y en la dirección en que ocurre

1. $f(x,y)=xe^{-y}+3y,\ \ P(1,0)$

2. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2),\ \ P(1,2)$

3. $f(x,y,z)=x+\dfrac{y}{z},\ \ P(4,3,-1)$

4. $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z},\ \ P(4,2,1)$

5. $f(x,y,z)=x\,y\,z+xy^2+y^2z,\ \ P(1,1,1)$

viii) Determine las direcciones en que la derivada dirigida de $f(x,y)=x^2+sen\,xy$ en el punto $(1,0)$ tiene el valor 1.

ix) Determine la dirección en que la derivada dirigida de $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en el punto $(1,1)$ es nula.

V. TRABAJO INDEPENDIENTE

1. Revisa toda la Hoja de Trabajo y enumera los tipos de ejercicios que se han planteado. Indica en cada caso la teoría que necesitas utilizar para realizar el ejercicio.

2. Clasifica y agrupa por tipo de ejercicios. Sin hacer ningún cálculo, establece los procedimientos generales para hallar cada uno de los ejercicios vistos en la Hoja de Trabajo.

3. Teniendo en cuenta la función que se considere, se presentan diferentes dificultades. Enumera todas las variantes de dificultades al realizar los ejercicios.

VI. CONCLUSIONES

- Realizar una comparación de los conceptos de derivada de funciones de una variable y de derivada de funciones de dos variables. Vincular la interpretación geométrica en ambos casos y establecer analogías y diferencias.

- Establecer la relación entre derivada direccional y derivada parcial.

- Explicar el concepto de gradiente

- Explicar el vínculo entre gradiente y derivada direccional

- Explicar por qué se puede hallar la derivada direccional a partir del gradiente.

HOJA DE TRABAJO 6.

DERIVADA DE FUNCIONES COMPUESTAS DE VARIAS VARIABLES

OBJETIVOS:

- Explicar el concepto de derivada de una función de varias variables.
- Analizar el concepto de derivada de una función de varias variables como una extensión del caso de una sola variable.
- Interpretar el concepto de derivada de una función de varias variables para funciones compuestas
- Desarrollar la capacidad de utilizar el concepto de derivada de una función de varias variables en aplicaciones.
- Desarrollar la habilidad para trabajar en grupo o en equipo.

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS. CONCEPTOS A RECORDAR

DERIVADAS DE FUNCIONES COMPUESTAS PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

De la regla de la cadena para funciones de una variable se obtiene el método para derivar una función compuesta si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, donde f y g son funciones diferenciables. En ese caso *y* es indirectamente una función diferenciable de t y = f (g(t))

$$y' = f'(g(t)) * g'(t)$$

Escrito con otra notación, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Para funciones de más de una variable, se presentan diversos casos según sea la función.

II. CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO: Identificar, interpretar, analizar

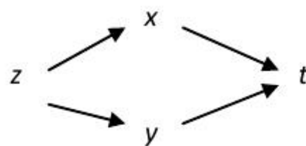
REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Caso I:

> Supongamos que $z = f(x, y)$ es un función diferenciable de x y de y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciales de t. Entonces z es una función diferenciable de t y se cumple
>
> $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

NOTA: A las variables x, y se les llama *variables intermedias* y a t *variable independiente*.

Para plantear la regla de la cadena, resulta útil hacer un *esquema tipo árbol* como en la figura. Trazamos dos ramas desde la variable dependiente z hacia las variables intermedias x, y para indicar que z depende de ellas, y después trazamos las ramas a partir de x, y hacia la variable t.



En este caso la derivada se le llama ***derivada total de la función.***

Ejemplo 1: Si $z = x^2 y + 3xy^4$, donde $x = sen\,3t$ y $y = \cos t$, calcule $\frac{dz}{dt}$ en $t = 0$

Sabemos que:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Derivamos y sustituimos

$$\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-sent)\cdot$$

Luego ,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0+3)(2\cos 0) + (0+0)(-sen\,0) = 6\cdot$$

Esta derivada puede interpretarse como una razón de cambio de z respecto a t en el punto (x, y), que se mueve a lo largo de la curva *C* expresada en ecuaciones paramétricas $x = sen\,3t$ y $y = \cos t$. En $t = 0$, $\frac{dz}{dt} = 6$ es la razón instantánea del incremento en el punto $(0, 1)$.

***Caso II*:**

> Supongamos que $z = f(x, y)$ es un función diferenciable de x y de y, donde $x = g(s,t)$ y $y = h(s,t)$ son funciones diferenciales de s y t. Entonces z es una función diferenciable de s y t y se cumple
>
> $$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Como en el caso I se puede hacer un esquema según la dependencia de las variables, que será útil para recordar la regla de la cadena.

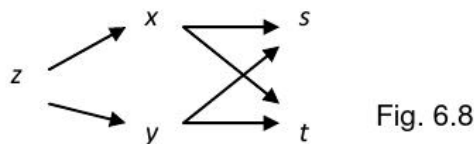


Fig. 6.8

En este caso, como se puede observar, las derivadas son parciales por lo que se le llaman ***derivadas parciales*** de la función compuesta.

Ejemplo 2: Si $z = x^2 \cos y$ donde $x = st$, $y = s - t$, calcule $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

Al aplicar la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2x\cos y)t - (x^2 sen\, y)(1)$$

$$= 2st^2 \cos(s-t) - s^2t^2 sen(s-t),$$

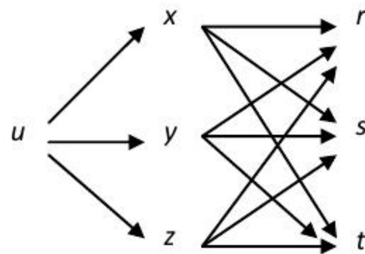
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (2x\cos y)s - (x^2 sen\, y)(-1)$$

$$= 2s^2t\cos(s-t) + s^2t^2 sen(s-t).$$

Se pueden presentar funciones con un número mayor de variables intermedias e independientes. En esos casos se procede de la misma forma y el esquema será de gran utilidad. Advierta que el número de términos de la derivada es el mismo que el número de variables intermedias y que cada uno corresponde a una de ellas.

Ejemplo 3: Si $u = x^4 y + y^2 z^3$ donde $x = r\,s\,e^t$, $y = r\,s^2 e^{-t}$, $z = r^2 s\,sen\,t$, determine el valor de $\frac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2,\ s = 1,\ t = 0.$

Con ayuda del esquema podemos determinar la derivada



Así es

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \left(4x^3 y\right)\left(r\,e^t\right) + \left(x^4 + 2y\,z^3\right)\left(2r\,s\,e^{-t}\right) + \left(3y^2 z^2\right)\left(r^2\,\text{sen}\,t\right)$$

Cuando $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$, resulta $x = 2,\ y = 2,\ z = 0,$ entonces

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192\,.$$

III. SINTETIZAR IDEAS PRINCIPALES

1. Enumera las diferentes posibilidades que se pueden presentar para el caso de funciones compuestas de varias variables.

2. En cada uno de los casos enumerados anteriormente, explica la forma en que construyes el esquema de árbol.

3. A partir de los esquemas de árbol, escribe la regla de la cadena, señalando con palabras cuando tienes que utilizar derivada parcial y cuando no.

4. En cada uno de los casos señala el número de sumandos que aparecen.

5. Señala la diferencia entre derivada total y derivadas parciales.

6. Elabora un procedimiento general para hallar la derivada total de una función compuesta de varias variables.

7. Elabora un procedimiento general para hallar las derivadas parciales de una función compuesta de varias variables.

IV. ACCIONES EN EL AULA. SOLUCIÓN DE EJERCICIOS:

I. Calcule la derivada total si

1. $z = x^2 + y^2$, siendo $x = t^3,\ y = 1 + t^2$
2. $z = \ln(x^2 + y^2)$, siendo $x = e^{-t},\ y = e^t$
3. $u = yz,\ y = e^x,\ z = x^2 - 2x + 4$
4. $z = xy + 3xy^2$, donde $x = sen\, 2t,\ y = \cos t$
5. $w = xy^2 z^3$, donde $x = sen\, t,\ y = \cos t,\ z = 1 + e^{2t}$
6. $u = \dfrac{x^2 + y^2}{\ln z}$, siendo $x = t^2,\ y = e^t,\ z = sen\, t$
7. $u = xyz$, siendo $z = xy,\ y = x^2$
8. $u = \frac{1}{5} e^{2x} (y - z),\quad y = 2\, sen\, x,\ z = \cos x$

II. Calcule las derivadas parciales si

1. $z = x^2 - 3x^2 y^3,\ x = s\,e^t,\ y = s\,e^{-t}$
2. $z = x^2 sen\, y,\ x = s^2 + t^2,\ y = 2st$
3. $z = e^x sen\, y,\ x = st^2,\ y = s^2 t$
4. $u = \ln xyz,\ x = s,\ y = s^2 t,\ z = s^2 t^2 r$
5. $u = \dfrac{x + y}{y + z},\quad x = s + r + t,\ y = s - r + t,\ z = s + r - t$
6. $w = x^2 + y^2 + z^2,\quad x = st,\ y = s\cos t,\ z = s\, sen\, t$, cuando $s = 1,\ t = 0$
7. $u = \dfrac{x}{y},\quad x = r\,e^{st},\ y = sr\,e^t$, cuando $r = 1,\ s = 2,\ t = 0$
8. $z = y^2 tg\, x,\quad x = t^2 uv,\quad y = u + tv^2$ cuando $t = 2,\ u = 1,\ v = 0$

III. Halle $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ de las funciones compuestas siguientes

1. $z = f(u)$, donde $u = arc\,sen\, xy + \dfrac{x}{y}$
2. $z = f(u)$, donde $u = sen\, \dfrac{x}{y} + e^{tg\, xy}$
3. $z = f(u, v)$, donde $u = x^2 \ln y,\ v = arcsen\, \dfrac{x}{y}$

4. $z=f(u,v)$, donde $u=e^{x^2+\cos y}$, $v=arctg\,\dfrac{y}{x}$

DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Teorema:

Dada la ecuación $F(\bar{x},y)=0,\ \bar{x}\in \text{IR}^n,\ \ y\in \text{IR}$, si se cumple:

1. $F(\bar{a},b)=0,\ \bar{a}\in \text{IR}^n,\ \ b\in \text{IR}$
2. $F(\bar{x},y)=0$ define implícitamente a la función $f:\text{IR}^n\to \text{IR}$ con $y=f(\bar{x})$
3. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\bar{a},b)\neq 0$.

Entonces existen las derivadas parciales de la función $y=f(\bar{x})$ en el punto $\bar{a}$ y se cumple

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{a},b)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\bar{a},b)},\quad \text{siendo}\quad \bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Ejemplo: Dada la ecuación $x^2+y^2-z^2-xy=0$, que define implícitamente a la función $z=f(x,y)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en $(-1,0,1)$.

Según el teorema anterior se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\qquad \text{y}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Calculando las derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y\,,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y-x\,,\ \frac{\partial F}{\partial z}=-2z$$

y sustituyendo en la fórmula se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x-y}{-2z}=\frac{2x-y}{2z}\qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y-x}{-2z}=\frac{2y-x}{2z}\ .$$

Evaluando ahora en el punto dado

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-1,0,1)=-1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(-1,0,1)=\frac{1}{2}.$$

EJERCICIOS:

I. Halle las derivadas de la función $z=f(x,y)$ que está expresada implícitamente por:

1. $x^3+y^3+z^3=9$ 2. $sen\,x+\cos y=tg\,z$ 3. $\ln x-e^z=xy^2$

4. $xe^{z^2+x}-ye^{2z-y}=5$ 5. $x^2+4y^2-z^2=2$ en $(-3,1,3)$

6. $e^x+e^y+e^z=3$ 7. $x^3+2xz-2yz^2-z^3=10$ en $(2,-1,3)$

8. $\ln(4x-z^2)=tg\,(x+y+3z)$ en $(1,-1,0)$

9. $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$ 10. $x\cos y+y\cos z+z\cos x=-1$

11. $arc\,sen(x+y)+\ln z^3+(x+y)^2 z=0$ 12. $x+y+z=sen\,xyz$

II. Demuestre que:

1. $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$ si $z^2+3xy+y^2z+x^3=0$

2. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$ si $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$

V. TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASE

1. Enumera los aspectos tratados en la Hoja de Trabajo y escribe un procedimiento de trabajo para cada uno de ellos justificando en cada caso los aspectos teóricos que lo avalan.

2. Utilizando todas las derivadas de funciones de una variable y las reglas de derivación. Elabora ejercicios para hallar derivada total de una función compuesta, derivadas parciales de una función compuesta y derivada de una función implícita.

3. Resuelve los ejercicios elaborados por ti y compáralos con los elaborados por otros compañeros

4. Reflexiona sobre todo lo aprendido en la Hoja de Trabajo, lee los objetivos declarados al inicio de la misma y explica si cumples con los objetivos que se declaran. En caso de que no hayas alcanzado alguno, piensa la estrategia que vas a utilizar para alcanzarlo.

VI. CONCLUSIONES

1. A partir de la síntesis de ideas principales y del trabajo independiente, elabora un resumen en la forma más escueta posible.

2. Sin hacer uso de los apuntes explica a tus compañeros las conclusiones que sacas de la Hoja de Trabajo, tomando en cuenta la teoría en la cual se basa, su relación con la Hoja de Trabajo anterior y la relación con el caso de funciones de una variable.

3. ¿Puedes considerar que la regla de la cadena para funciones de una variable como caso particular del caso para funciones de varias variables? Justifica tu respuesta.

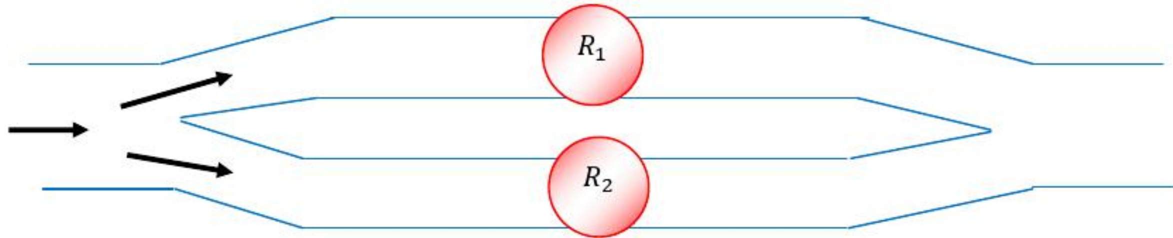
HOJA DE TRABAJO 7. DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

VISUALIZACIÓN E IDENTIFICACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS ESENCIALES DEL CONCEPTO DE DIFERENCIAL DE VARIAS VARIABLES MEDIANTE MANEJO DE SOFTWARE. MODELACIÓN

I. OBJETIVOS

1. Visualizar la posibilidad de determinar el incremento de una función en una cierta vecindad de un punto, mediante el incremento de la función lineal tangente en ese punto.
2. Identificar el concepto de aproximación lineal con el diferencial total de una función de varias variables, por medio de tablas, graficas y representaciones analíticas para dar solución a problemas que involucren dicho concepto.
3. Identificar las propiedades del concepto de diferencial total, mediante la resolución de una serie de ejercicios relativos al tema.
4. Determinar el diferencial de algunas funciones de varias variables que modelan situaciones de contexto hipotético.
5. Identificar la aplicación del diferencial total en situaciones problémicas.
6. Encontrar patrones y regularidades del diferencial en funciones una vs. de varias variables, mediante el uso de software de Cálculo simbólico, numérico y gráfico.
7. Modelar, interpretar y solucionar problemas de contexto hipotético mediante la implementación de un software, que resalte las propiedades del diferencial total de una función de varias variables.

PROBLEMA DETONANTE DE LA MOTIVACIÓN



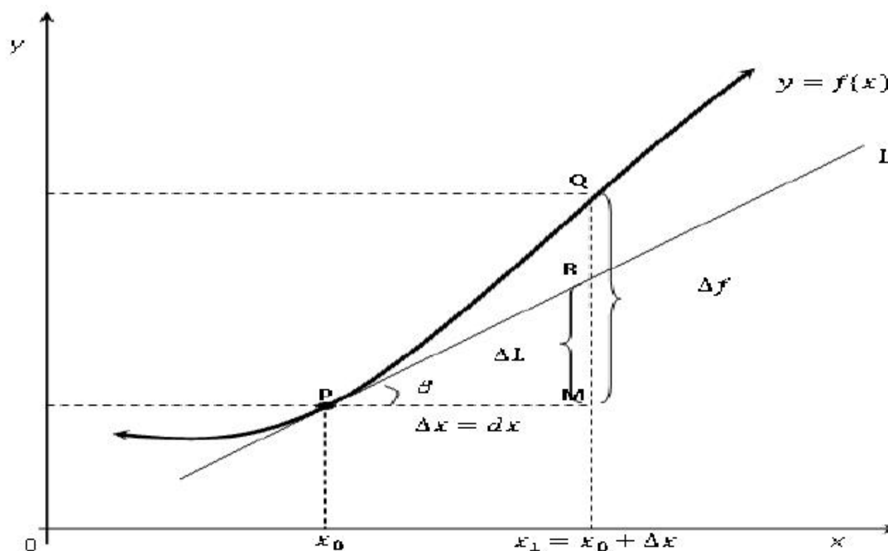
El Sistema cardiovascular humano es semejante a circuitos eléctricos conectados en serie y en paralelo. Por ejemplo, cuando la sangre fluye a través de dos resistencias vasculares en paralelo, como se muestra en la anterior ilustración, entonces la resistencia equivalente R del circuito es:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{Entonces} \qquad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Si los porcentajes de error al medir R_1 y R_2 son $\pm 0.2\%$ y $\pm 0.6\%$, respectivamente, calcular el porcentaje máximo error aproximado de R.

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS A RECORDAR

Observe y analice la siguiente figura



Conteste las siguientes preguntas con respecto a la ilustración anterior.

-Exprese algebraicamente la distancia del punto R a M (en términos de $x_0 \; y \; x_1$)

-¿Cómo puede expresarse algebraicamente Δf en términos de el valor de $f \; evaluada \; en \; x_0 \; y \; en \; x_1$?

¿Geométricamente qué representa en la ilustración anterior?

Si considera que la recta L, es tangente en el punto P de la curva, construya una expresión para determinar la función ***tg*** del ángulo θ (hágalo en términos de los incrementos en x e y)

-Ahora, utilizando la expresión que construyó para la $tg\theta$ de la recta L, halle el término ΔL.

-Exprese la relación entre $\Delta L \; y \; \Delta f$.

-Describa cómo es ΔL en comparación con Δf cuando $\Delta x \to 0$

Definición en libro de Análisis Matemático:

La función y = F(x), definida en cierto entorno U(Po) del punto Po =xo

es diferenciable en Po si su incremento en este punto F(x) – F(xo)

- **Lea** con cuidado la definición de función diferenciable y de diferencial dada en libros de Análisis Matemático y responda de acuerdo a lo que se le solicita

La función $y = F(x)$, definida en cierto entorno $U(P_0)$ del punto $P_0 = x_0$ **es diferenciable en $\mathbf{P_0}$** , donde $x \epsilon U(P_0)$, si su incremento en este punto $F(x) - F(x_0)$, se representa de la forma:

$$Adx + e(dx); \qquad dx = x - x_0$$

Donde A es una constante y $e(dx) = o(dx)$, es decir, $e(dx) \to 0$ cuando $dx \to 0$. La función lineal $A(dx)$ (de la variable dx) se llama **diferencial de la función F en el punto $\mathbf{P_0}$** y se designa por:

$$dF(x_0); \qquad dF(x_0) = Adx$$

De esta forma

$$F(x) - F(x_0) = dF(x_0) + o(dx)$$

-Exprese en lenguaje natural el concepto de diferenciable en un punto y el de diferencial. Explique ambos conceptos, en forma geométrica y expresados en términos de la pendiente de L.

-Establezca claramente la diferencia entre derivable y derivada, diferenciable y diferencial.

-Para funciones de una variable, ¿derivable implica diferenciable? Justifique.

-¿Se cumple el reciproco de lo anterior?. Justifique ¿por qué si o por qué no?

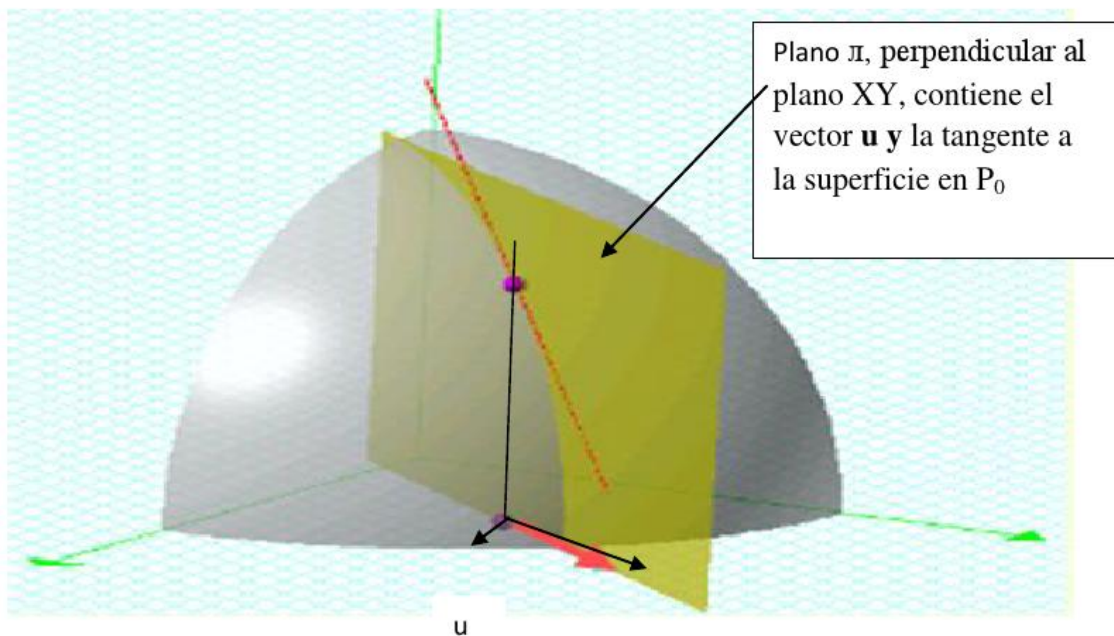
-Si una función f es continua, ¿se puede asegurar que sea diferenciable y derivable?

-El hecho de que una función de variable real sea derivable y diferenciable ¿implica continuidad de la función en todo su dominio, punto o vecindad?

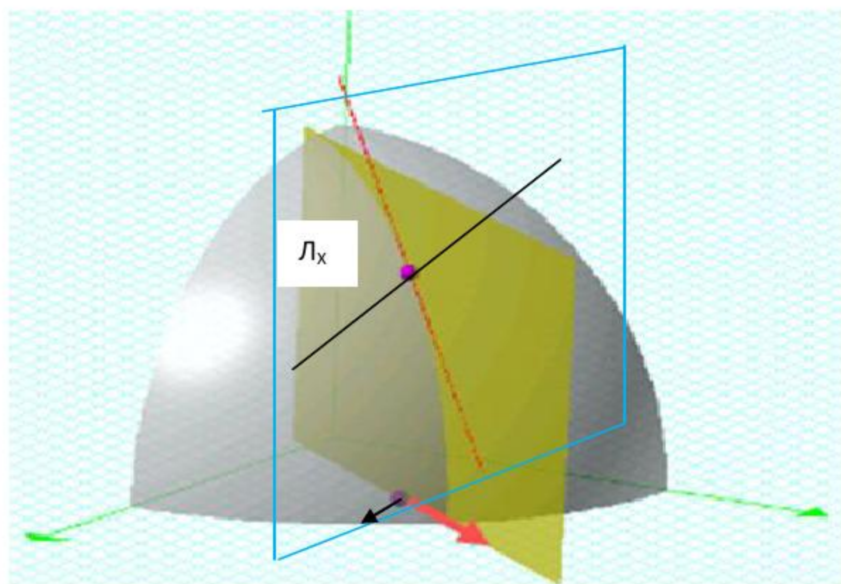
II. CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO. Identificar, interpretar y analizar

Visualización de la tangente a la curva de la superficie, que se encuentra en el plano л.

Este plano л es perpendicular al plano XY y contiene al vector **u**, en cuya dirección se desea hallar la derivada direccional en el punto P_0.

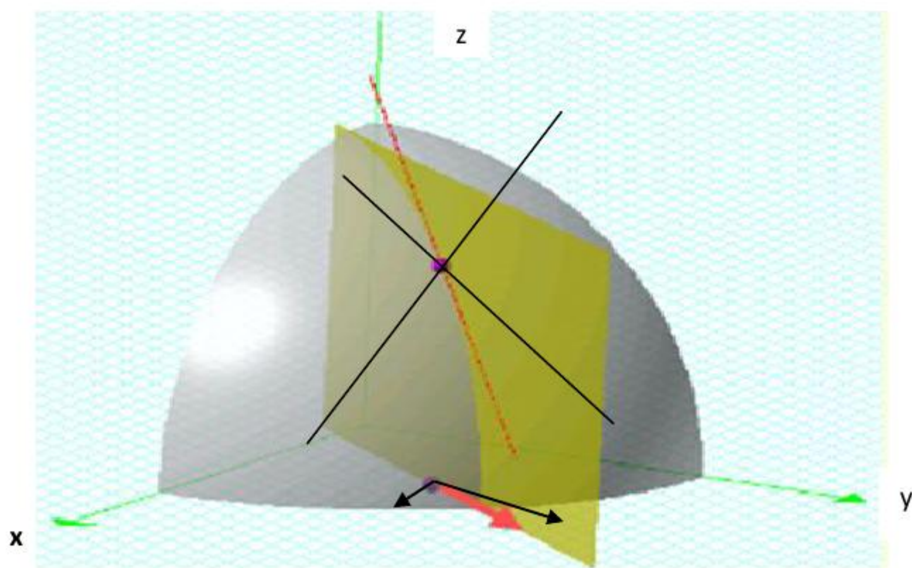


Si se considera la recta tangente a la superficie en el punto P_0, en la dirección del eje de las x, se tiene un plano perpendicular al plano xy que contiene la componente en x del vector **u** y contiene al punto P_0

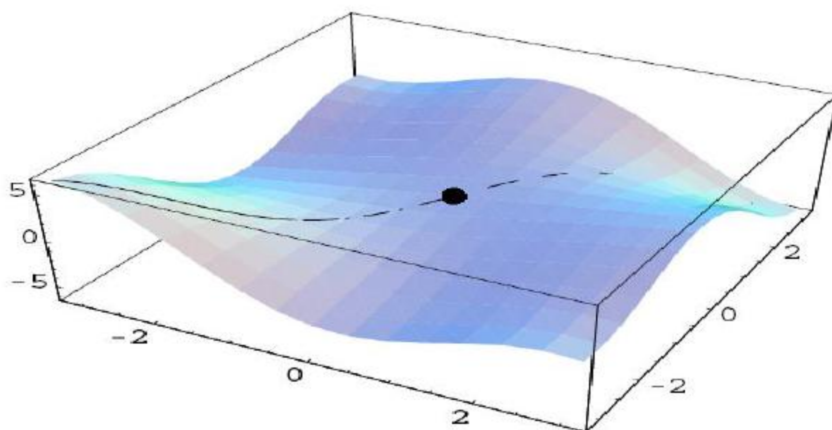


De igual forma se puede hallar la recta tangente a la superficie en P_0 en la dirección del eje de las y, en este caso la tangente estará en un plano perpendicular al plano xy que contiene a la

componente en y del vector **u** y al punto P_0. Las rectas tangentes en la dirección de los ejes x y y aparecen en la gráfica siguiente, ,junto con la tangente en la dirección del vector **u**.

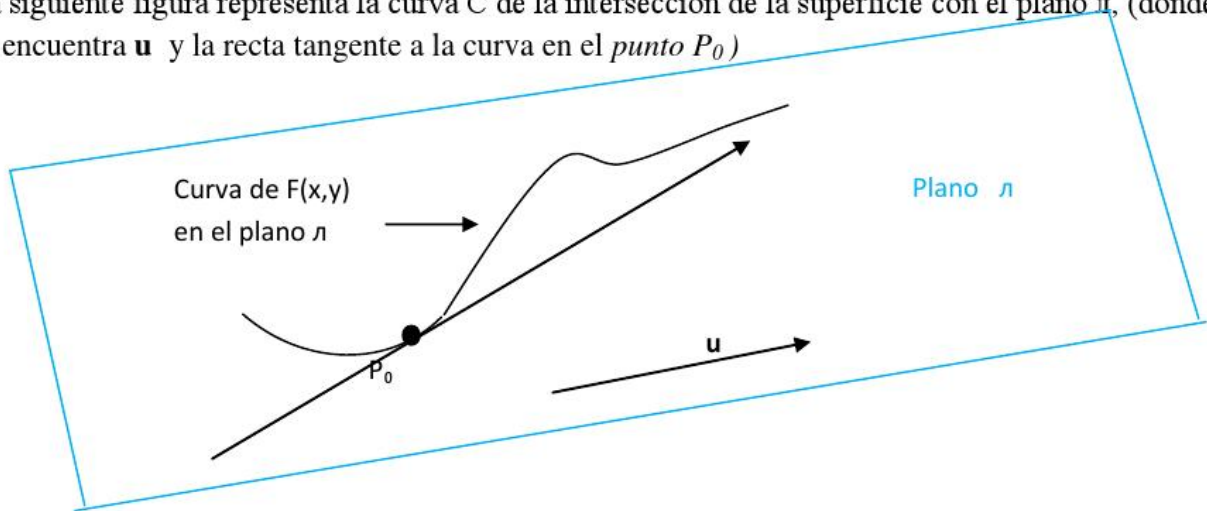


Consideremos ahora otra superficie y supongamos que el plano π al intersectar la superficie describe la curva C que aparece en línea de puntos



-Escriba la expresión de la derivada direccional de F(x,y) en el punto P_0 en la dirección del vector **u.**

La siguiente figura representa la curva C de la intersección de la superficie con el plano л, (donde se encuentra **u** y la recta tangente a la curva en el *punto* P_0)



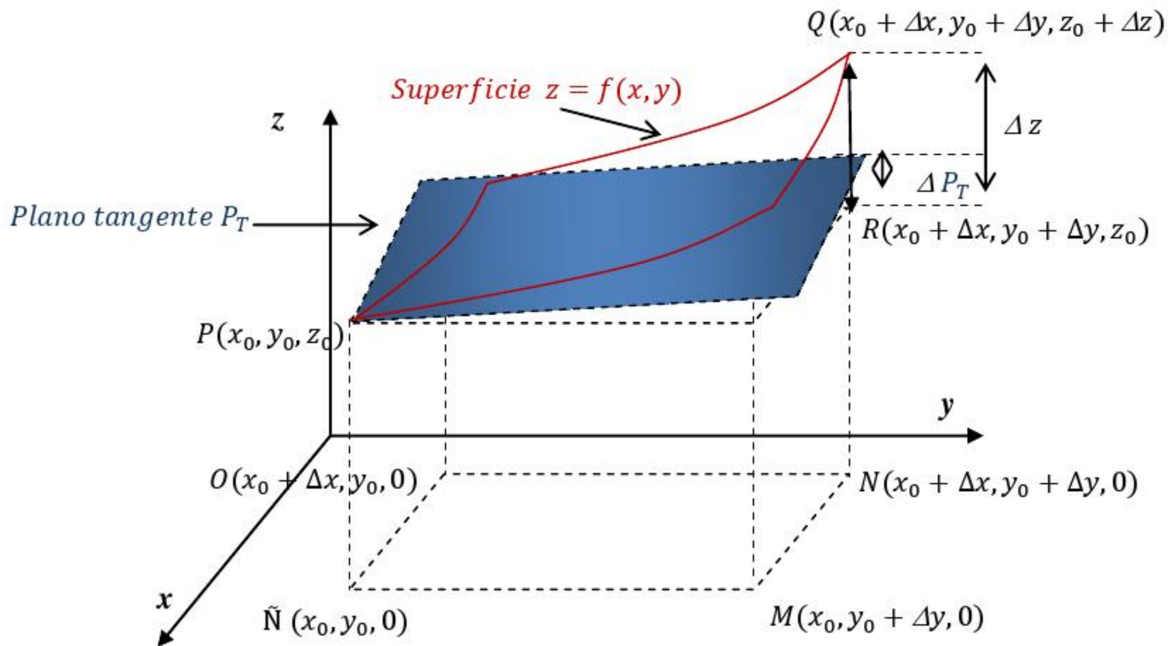
i) Halle la proyección del vector tangente sobre el vector u, en representación gráfica y vinculado con la expresión del producto escalar de los dos vectores. $\text{Proy}_u\, t = \frac{t.u}{\|u\|}$

ii) Halle la tangente trigonométrica del ángulo formado por los dos vectores y relacione su interpretación con la interpretación para el caso de función de una variable, visto al inicio del punto 1 $\text{tg}\alpha = \frac{h}{\|u\|}$

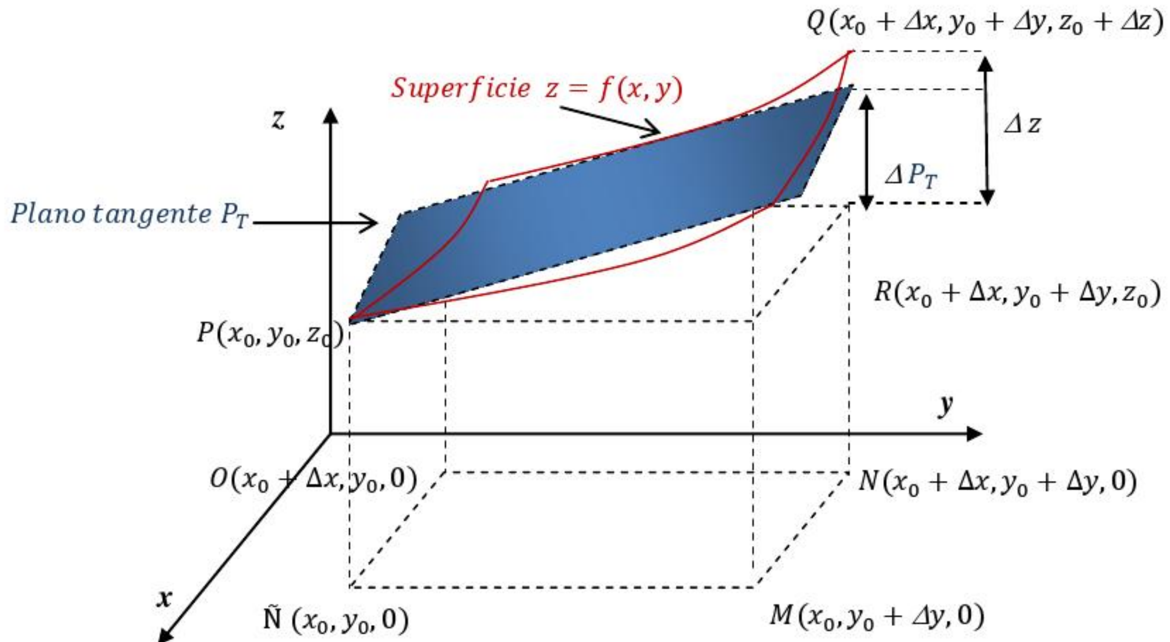
iii) Exprese la relación entre la derivada direccional, y los resultados obtenidos en los incisos i y ii $D_u t = \frac{t.u}{\|u\|}$ $D_u t = \text{tg}\alpha$

iv) Halle el valor de h expresado en función del producto escalar de los vectores.

a) *Observe y analice las siguientes figuras:*



Suponga ahora que considera en la figura anterior valores de $\Delta \boldsymbol{x}$ **y** $\Delta \boldsymbol{y}$ mucho más pequeños, y que al dar una ampliación de la figura resultante obtenemos la siguiente:



b) Conteste las siguientes preguntas con respecto a las ilustraciones anteriores.

Construcción de ΔP_T

¿Cómo describe la continuidad de la función z en el plano $\boldsymbol{xy}$?

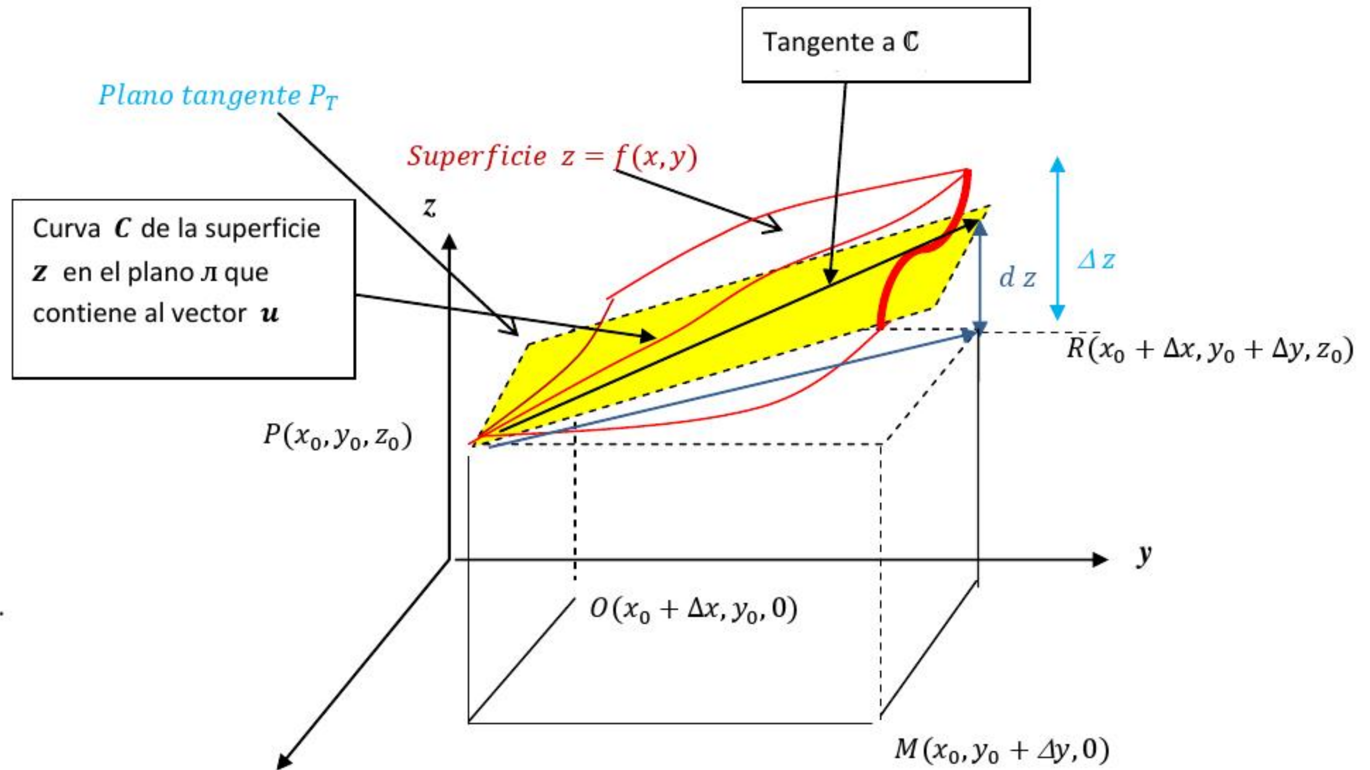
¿Qué aspectos semejantes encuentra entre el grafico de la función de varias variables $\boldsymbol{z}$ y el de la función de una variable $\boldsymbol{f}$, que analizaste en la sesión 1? ¿Cuál es la diferencia?

Explique según la ilustración anterior qué representan $\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{y}$ $\Delta\boldsymbol{z}$.

¿qué indicaban $\Delta\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{y}$ $\Delta\boldsymbol{y}$ en el caso del diferencial de funciones de una variable?

Si considera el plano $\boldsymbol{P_T}$ de la función $\boldsymbol{z}$. Construya una expresión algebraica para ΔP_T .

¿Qué representa gráficamente la expresión $\boldsymbol{P_T}$ en el cálculo del diferencial de varias variables y que representó la expresión $\boldsymbol{L}$ en la sesión III.I.*1*?



De la expresión para ΔP_T que obtuvo, ¿cuál es el valor que representa la pendiente del plano tangente a la superficie de la función z?

Establezca un paralelismo con el caso del diferencial de una variable respecto a lo que representa la pendiente de la recta L,

¿Qué puede concluir de lo anterior?

Observe nuevamente la ilustración inicial de III.1. En la expresión algebraica a la que llegó, sustituyó el valor al que es igual $\overline{RS}$ y $\overline{PS}$ respectivamente

¿De qué forma se puede obtener el valor de $\boldsymbol{\Delta P_T}$, utilizando una idea análoga a la de una variable?

Si sabe que el valor de $\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\Delta x}$ es infinitesimal en el caso de una variable. ¿Cómo quedaría la expresión que determina el valor de $\boldsymbol{\Delta P_T}$**?,** suponiendo que $\boldsymbol{dx = \Delta x\ y\ dy = \Delta y}$ son infinitesimales

El valor de $\boldsymbol{\Delta P_T}$ es igual a $\boldsymbol{dz}$ y ambos representan el diferencial de la variable dependiente de una función $\boldsymbol{z}$.

Definición de libro de Análisis Matemático:

Sea la función z= $F(x,y)$, definida en cierto entorno $U(P_0)$ del punto $P_0 = (x_0,y_0)$,su incremento en este punto es $\mathrm{F(x,y) - F(x_0,y_0)}$, donde $(x,y)\epsilon U(P_0)$

La función es diferenciable en $\mathbf{P_0}$ *si* su incremento se puede representar de la forma:

$$A(dx,dy) + e(dx,dy); \qquad dx = x - x_0 \quad y \quad dy = y - y_0$$

Donde A no depende de (dx,dy), $e(dx,dy) = o(dx,dy)$ es decir tiende a cero cuando $(dx,dy) \to 0$.

La función lineal $A(dx,dy)$ (de las variables (dx, dy))) se llama **diferencial de la función F en el punto Po** y se designa por:

$$dF(P_0) = A \cdot (dx,dy)$$

De esta forma $\boldsymbol{F(x) - F(x_0) = dF(P_0) + o(dx,dy)}$

Construcción de $\Delta z = \Delta f$

Observe la ilustración del inciso b).

De forma análoga en que procedió para una variable, escriba una expresión que determine el valor de $\boldsymbol{\Delta z}$

Conclusiones sobre la semejanza entre los valores de Δf y ΔP_T cuando $\Delta(x,y) \to (0,0)$

Si considera que $\Delta(x,y) \to (0,0)$ que sucede entre el gráfico del plano P_T y la superficie de la función z?

¿Qué puede decir de los valores de P_T y $Z = (x,y)$ cuando sucede lo anterior?

¿Qué sucedió en el caso de la función f en el caso de una variable cuando $\Delta x \to 0$?

¿Qué puede concluir de lo sucedido en el caso de funciones de una variable y la de funciones de varias con los valores y graficas de las funciones $z = f(x,y)$?

¿A qué valor se aproxima Δz cuando se acerca al punto $P(x_0, y_0, z_0)$?

¿Recuerda que pasó entre los valores de ΔL y Δf en la sesión III.I.?

Una vez que ya cuenta con una expresión algebraica para representar los valores de Δz y ΔP_T y sabe que significado tiene en la gráfica mostrada de la ilustración del inciso a). Responda lo siguiente:

¿Qué pasa con el valor de ΔP_T cuando $\Delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbf{0}$ (o sea se hace más pequeño)?

¿Qué pasa con el valor de Δz cuando $\Delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbf{0}$ (o sea se hace más pequeño)?

¿Qué pasa gráficamente entre el plano tangente P_T y la superficie que describe la función z a medida que $\Delta(x_0, y_0) \rightarrow (0,0)$?

¿Qué relación puede intuir que exista entre el plano tangente P_T y la derivada de función z = f(x,y) en el punto $\boldsymbol{P}$?

Según lo anterior ¿A qué valor se aproxima Δz?

¿Qué puede concluir del valor de ΔP_T en relación al Δz cuando $\Delta(x, y) \rightarrow (0,0)$?

Con la información que hasta ahora tiene del diferencial total de una función. Exprese con palabras ¿cómo define el concepto del diferencial total de una función de varias variables?

Exprese algebraicamente el diferencial de la variable dependiente e independiente de la función *z*.

III. SINTETIZAR LAS IDEAS PRINCIPALES

Contesta cada uno de los siguientes incisos

-Concepto de derivada direccional

- Aproximaciones por planos tangentes a funciones de varias variables.

- Concepto de diferencial total de funciones de varias variables.

-¿Cuál es la característica principal de una función de varias variables para que sea diferenciable? Justifique su respuesta.

IV. ACCIONES EN EL AULA. SOLUCIÓN DE EJERCICOS Y PROBLEMAS

Utilizando el programa de MatLab denominado splano.m compare el valor de $\Delta \boldsymbol{P_T}$ en relación al Δf. Para diferentes puntos de las siguientes funciones

i) · $z = x^2 y + 2xy^2$

ii) . $z = \frac{sen\,2x}{1 + \cos y}$

Cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ los incrementos del plano tangente y de la función se asemejan mucho. A partir del uso del programa en las dos funciones y de lo observado por usted respecto a $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ responda de acuerdo a su análisis personal:

Los valores de Δx y Δy para los que se pueden considerar que los incrementos de P_t y f son prácticamente iguales, se debe a:

- una decisión personal arbitraria
- las características del crecimiento de la función
- las características del problema que se esté considerando
- todas las anteriores
- otra razón que usted considere

3. PROBLEMAS

*1.- Analice si las propiedades que se cumplen para el caso de funciones de una variable se cumplen para funciones de dos variables. Justifique teniendo en cuenta la variación del concepto de continuidad, derivada y diferencial.

- ¿La continuidad de la función $z = f(x, y)$ es necesaria para que exista el diferencial?

- El hecho de que una función $z = f(x, y)$ sea derivable ¿implica que ésta también es diferenciable? Justifique su respuesta (compárela con la respuesta análoga en el caso de funciones de una variable).

- El reciproco de la pregunta anterior ¿se cumple?. Si o no y por qué.

- ¿Se cumplen para funciones de varias variables las mismas propiedades con las operaciones que para funciones de una variable?

$$diferencible \Rightarrow derivable$$

$$diferencible \Leftarrow derivable$$

$$diferenciabilidad \Rightarrow continuidad$$

$$diferenciabilidad \underset{no}{\Leftarrow} continuidad$$

$$derivable \Rightarrow continuidad$$

$$derivable \overset{no}{\Leftarrow} continuidad$$

$\boldsymbol{diferenciable \leftrightarrow derivable}$ **para funciones de una variable.**

$diferenciabilidad \underset{no}{\Leftarrow} continuidad$ No se cumple para una variable (contraejemplo)

Para funciones de varias variables

Condición necesaria

Teorema.-*Si la función* $z = f(x,y)$ *es diferenciable en el punto* (x_0, y_0) *entonces ella es continua en ese punto.*

T*eorema*.-*Si la función* $z = f(x,y)$ *es diferenciable en el punto* (x_0, y_0) *y* $dz = Adx + Bdy$ *es su diferencial en ese punto, entonces en el punto* (x_0, y_0) *existen todas las derivadas parciales de la función* f *y*

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = A \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = B$$

De esta forma,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Teorema.-*Si la función* $z = f(x,y)$ *es diferenciable en el punto* $P_0 = (x_0, y_0)$ *entonces* f *tiene en este punto derivada según cualquier vector* $\boldsymbol{u}$ *= (dx,dy) y*

$$D_u f(P_0) = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Condición suficiente

Teorema.-*Supongamos que la función* $z = f(x,y)$ *en cierto entorno del punto* (x_0, y_0) *tiene las derivadas parciales* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *las que son continuas en el punto* (x_0, y_0)*; entonces la función* $z = f(x,y)$ *es diferenciable en ese punto.*

Corolario.- *Si la función* $z = f(x,y)$ *tiene en cierto entorno del punto* (x_0, y_0)*, las derivadas parciales* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *y además, estas derivadas parciales son continuas en un punto* (x_0, y_0)*, entonces la función* $z = f(x,y)$ *también es continua en este punto.*

Escriba aquí la ecuación. $f(x,y)$	Continua	Existe f'	C^1	Existe f''	C^2	$D_{(x,y)}$	dz	Grafico
I $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4-y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$	No	No	No	No	No	No	No	
II $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2-y} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$	No	No	No	No	No	No	No	

CASO I Funciones que no son derivables ni diferenciables¿

CASO I Preguntas referentes a funciones que no son derivables ni diferenciables¿

¿Cuál es el dominio para el cual la función I está definida?

¿La función I está definida en el punto (0,0)? Por qué si o por qué no.

¿La función I es continua en todo su dominio? Explique.

¿La función I es continua en el punto (0,0)?. Justifique su respuesta.

¿Existe la derivada en el punto (0,0)? Por qué si o por qué no.

¿Es diferenciable en ese mismo punto? Por qué si o por qué no.

¿Cuáles son las propiedades (continuidad, existen 1as derivadas,…) que comparten las funciones I y II?

¿Con las funciones I y II puedes inferir cuáles propiedades se requieren para que la función pueda ser derivable?

Caso II: Ejemplos de funciones que solo cumplen una propiedad que permita la diferenciabilidad y derivabilidad								
$F(x,y)$	Continua	Existe f'	C^1	Existe f''	C^2	$D_{(x,y)}($	dz	Grafico
III $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0 \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0 \end{cases}$	Si	No	No	No	No	No	No	
IV $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$	No	Si	No	No	No	No	No	

CASO II Preguntas referentes a funciones que solo cumplen una de las características necesarias para que sean derivables y/o diferenciables

1. ¿Por qué la función III es continua?

2. ¿La función III es continua en el punto (0,0)? Por qué si o por qué no.

3. ¿La función III es derivable en (0,0)? Explique su respuesta.

4. ¿La función III es diferenciable en el punto (0,0)?. Justifique su respuesta.

5. ¿Puedes ver alguna relación entre la derivabilidad y diferenciabilidad de esta función? Explica.

6. ¿La función IV para qué punto o puntos no es continua?

7. ¿El hecho de que la función no es continua implica que la función IV tenga o no derivadas parciales en algún punto? Justifica.

Caso III: Ejemplos de funciones que cumplen con más de una propiedad requerida para que sean diferenciables y/o derivables

$F(x,y)$	Continua	Existe f'	C^1	Existe f''	C^2	$D_{(x,y)}($	dz	Grafico
V $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x-y} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$	No	Si	No	Si	No	No	No	
VI $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$	Si	Si	No	No	No	No	No	

CASO III Preguntas referentes a funciones que cumplen dos de las características necesarias para que sean derivables y/o diferenciables

1. ¿Para qué valores la función V es continua?

2. ¿La función es continua en el punto (0,0)? Por qué si o por qué no.

3. ¿De la no continuidad de la función y de sus derivadas parciales (1as y 2das), se puede inferir la existencia de las derivadas parciales? Explique.

4. Que existan las derivadas parciales asegura ¿que la función V es diferenciable?. Justifique su respuesta.

5. Que la función V sea derivable asegura ¿que la función es o no continua y diferenciable?. Explica tu respuesta.

6. Del hecho de que la función VI sea continua, se puede inferir la existencia de las derivadas parciales de la función? Justifique.

7. ¿La función VI es diferenciable por ser continua y por existir las 1as derivadas parciales? Por qué si o por qué no.

8. ¿Cuál es la conclusión a la que puedes llegar, si comparas las características de las funciones V y VI con respecto a que estas sean o no derivables o diferenciables?

Caso IV: Ejemplos de funciones de varias variables que cumplen con todas las propiedades necesarias para que la función sea diferenciable y /o derivable.

$F(x,y)$	Continua	Existe f'	C^1	Existe f''	C^2	$D_{(x,y)}$	dz	Grafico
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$	Si excepto (0,0)	Si excepto (0,0)	Si excepto (0,0)	Si excepto (0,0)	Si excepto (0,0)	Si excepto (0,0)	Si excepto (0,0)	

CASO IV Preguntas referentes a funciones que presentan las características necesarias y suficientes para que sea diferenciable y/o derivable

1. ¿Cuál es el dominio para el cual la función VII y VIII están definidas respectivamente?

2. ¿Ambas funciones están definidas en el punto (0,0)? ¿Cuál si y cuál no y por qué?

3. ¿Para qué valores la función VII es continua? Explique.

4. ¿Pasa lo mismo para la función VII?. Justifique su respuesta.

5. ¿Para cuál de las funciones se cumple la continuidad en el punto (0,0)? Por qué.

6. ¿Explique cuáles son las condiciones que requiere cumplir la función para ser de clase C^1 y C^2?

7. ¿Las derivadas existen en ambas funciones? Por qué si o por qué no.

8. ¿Ambas funciones son diferenciables o no y por qué?

9. El hecho de que la función VII fue diferenciable ¿aseguró inferir la existencia de sus derivadas?

10. ¿La existencia de las derivadas asegura o no que la función VII sea diferenciable?

11. ¿De la continuidad de las funciones se puede inferir que la función es derivable? Explique su respuesta.

12. ¿De la continuidad de las funciones se puede inferir que la función es derivable? Explique su respuesta.

13. ¿Qué la función sea derivable se infiere la continuidad de la función? Justifique.

14. ¿Qué la función sea diferenciable se infiere la continuidad de la función? Justifique.

15. ¿La diferenciabilidad implica derivabilidad o viceversa?

16. ¿Cuáles serían las características centrales o principales para que una función sea diferenciable?

c) Comparación

- ¿Cómo relaciona el plano tangente a una superficie con el concepto de diferencial total de una función de varias variables, según lo que investigó?

- ¿Cuáles son sus conclusiones?

V. TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASE

-Explique si la definición siguiente es posible establecerla como una definición única para una y varias variables, válida también para otro tipo de funciones

Sea la función y = F(X), definida en cierto entorno $U(P_0)$ del punto P_0 =$\mathbf{X^0}$,, $\mathbf{X^0}$ = (x_1^0 ,x_2^0 ,…, x_n^0), X pertenece a U(Po)

La función y = F(X) **es diferenciable** en P_0

si su incremento $F(X) – F(X^0)$ es representable en la forma

A.dX + e(dX) ; $dX = X - X_o$

Donde **A.dX** es la parte principal del incremento, A no depende de dX y

$e(dX) = o(dX)$ es decir tiende a cero cuando dX tiende a cero

La función lineal AdX (de la variable dX) se llama **diferencial de la función F en el punto Po** y se designa por dF(Xo) , dF(Xo) = AdX

De esta forma $\boldsymbol{F(P) - F(P0) = dF(P0) + o(dX)}$

(i) Expresar las ideas principales de los conceptos de función diferenciable en un punto y de diferencial de una función.

(ii) Expresar las ideas principales de los conceptos de función diferenciable en un punto y de diferencial de una función.

(iii) Revisar los problemas y ejercicios planteados con anterioridad para reconocer las ideas comunes en todos los casos, las ideas específicas en cada caso, las ideas esenciales. las diferencias debido a las propiedades en los diferentes dominios.

(iv) Abstraer las ideas fuera de contexto específico y buscar las ideas que sintetizan y agrupan todos los planteamientos vistos.

(v) Establecer una síntesis de las propiedades que se cumplen para funciones de una variable y cuáles se cumplen para funciones de varias variables.

Vincular límite de una función en un punto, con continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad

¿La existencia de límite en un punto implica continuidad?, ¿La continuidad implica derivabilidad?, ¿La derivabilidad implica diferenciabilidad? Y viceversa

Funciones de una variable	**Funciones de varias variables**

- Dar solución mediante un software a diferentes ejemplos y a los problemas de contexto vistos en la etapa de motivación.
- Relacionar la solución gráfica con la algebraica, analítica o numérica.
- Exponer trabajo y generar discusión.

EJERCICIOS

Lea cuidadosamente y responda lo solicitado:

I. Halle Δf y df . Compare la diferencia de los resultados.

1. Si $f(x,y) = y^2 + xy$ en el punto $(3,1)$ siendo

   i) $\Delta x = 0.5$ y $\Delta y = 0.2$

   ii) $\Delta x = -0.2$ y $\Delta y = 0.1$

2. Si $f(x,y) = x^3 - xy + 3y^2$ en el punto (5,4) siendo

   i) $\Delta x = 0.5$ y $\Delta y = 0.2$

   ii) $\Delta x = -0.2$ y $\Delta y = 0.1$

II. Diga si la función $z = f(x,y)$ es diferenciable, para todo $(x,y) \in$ lR ó existen puntos donde no es diferenciable. Responda en base a teoremas.

1. $z = x^2 y + 2xy^2$

2. $z = 4x^2 + ye^x$

3. $z = \dfrac{sen\,2x}{1+\cos y}$

4. $z = 4 + sen\,x \cos y$

III. Halle la diferencial total en los puntos donde sea diferenciable y señale una vecindad donde tenga sentido aproximar utilizando el diferencial:

1. $z = x^3 y^2 - xy^3$
2. $z = sen\, x \cos y$
3. $z = \dfrac{sen 2x}{1 + \cos y}$
4. $z = 3x^2 + ye^x - 2$
5. $z = sen\, xy + tg\, \dfrac{x}{y}$
6. $z = x \cos y + y\, sen\, x$
7. $u = xyz + xy^2 + y^2 z^2$
8. $u = \ln x \ln y \ln z$
9. $u = e^{xy} + yz^2$
10. $u = xe^y + ye^z - z$

Sean las funciones P(x,y) y Q(x,y) continuas, conjuntamente con sus derivadas parciales de primer orden en un recinto simplemente conexo D.

Para que la expresión P(x,y)dx + Q(x,y)dy represente en el recinto D la diferencial exacta de una función determinada f(x,y) ,es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

1. Investigue si la expresión $(e^x sen\, y + e^y \cos x)\, dx + (e^x \cos y + e^y sen\, x + y) dy$ es diferencial exacta de alguna función.

2. Investigue si cada una de las expresiones siguientes es diferencial total exacta.

1. $sen^2 y\, dy + x\, sen 2y\, dy$
2. $2xy\, dx + x^2 \cos y\, dy$
3. $\left(e^{xy} + 5\right)dx + \left(5x + e^{xy}\right)dy$
4. $\left(1 + e^x\right)dy + e^x (y - x) dx$
5. $\left(e^{x+y} + e^{x-y}\right)(dx + dy)$
6. $\dfrac{2x}{y^3} dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy$
7. $\dfrac{y}{x} dx + \left(y^3 - \ln x\right)dy$
8. $(x \cos y - y seny)dy + (x seny + y \cos y)dx$
9. $\dfrac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2}$
10. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$
11. $\dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2} dx - \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2} dy$
12. $\left(2e^{2x+3y}\right)dx + \left(3e^{2x+3y} + x\right)dy$.

VI. CONCLUSIONES

1. Explica el concepto de diferencial para funciones de una variable, con palabras, gráficamente y con lenguaje matemático.

2. Establece la relación entre derivabilidad, diferenciabilidad y continuidad para funciones de una variable.

3. Explica el concepto de diferencial para funciones de varias variables, con palabras, gráficamente y con lenguaje matemático.

4. Establece la relación entre derivabilidad, diferenciabilidad y continuidad para funciones de varias variables.

5. Señala las diferencias que se producen en el concepto de diferencial y en sus propiedades para el caso de funciones de una variable y para funciones de varias variables. Explica con palabras, con ejemplos y gráficamente las diferencias.

6. Explica el concepto de diferencial exacta y las condiciones bajo las cuales se garantiza su existencia.

HOJA DE TRABAJO 8. DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

MODELACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

OBJETIVOS

1. Identificar el concepto de aproximación lineal con el de diferencial para funciones de una y varias variables, para dar solución a problemas que involucren dicho concepto.
2. Identificar las propiedades del concepto de diferencial, mediante la resolución de una serie de ejercicios relativos al tema.
3. Determinar el diferencial de algunas funciones de una y varias variables que modelan situaciones de contexto hipotético.
4. Identificar la aplicación del diferencial en situaciones problémicas.

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS A RECORDAR

MODELACIÓN PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Escojan uno de los problemas que se presentan a continuación y expónganlo al grupo, destacando conceptualmente la parte geométrica, algebraica y numérica de la modelación y de sus resultados.

1. La presión atmosférica P disminuye al aumentar la altitud h. A una temperatura de 15º C la presión es de 101.3 kilopascales (kPa) a nivel del mar, 87.1 kPa a la altitud h=1 km y 74.9 kPa en h=2 km. Use una aproximación lineal para estimar la presión atmosférica a la altitud de 3 km.

2. Los beneficios P de una empresa vienen dados por:

$$P = (500x - x^2) - (\frac{1}{2}x^2 - 77x + 3000)$$

   Aproximar el cambio de los beneficios cuando la producción cambia de x=115 a x=120 unidades y el cambio porcentual del beneficio en esa misma circunstancia.

3. El periodo de un péndulo g es la aceleración de la gravedad y T es el tiempo. Si el péndulo se ha calentado de manera que su longitud ha crecido un 0.5%:

a) Calcular el porcentaje aproximado de cambio del periodo.

b) Con el resultado del apartado a), hallar el error aproximado del reloj de dicho péndulo en un día.

4. Se mide la aceleración de la gravedad en un punto de la superficie de la Tierra con un péndulo de longitud L. Usar la fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Para aproximar el porcentaje del error en el valor de g, si conocemos el periodo T del péndulo con 0.1% de margen de error respecto de su verdadero valor.

5. La resistencia eléctrica R de cierto alambre esta dada por $R = \frac{k}{r^2}$, donde k es una constante y r es el radio del alambre. Suponiendo que su radio r tiene un error máximo de 5%, usar diferenciales para estimar el porcentaje de error de R.

6. Una quemadura de forma circular en la piel de una persona es tal que si *r* centímetros es la longitud del radio y *A* centímetros cuadrados es el área de la quemadura entonces, $A = \pi r^2$. Utilice diferenciales para determinar la disminución aproximada del área de la quemadura cuando el radio disminuye de 1 cm a 0.8 cm.

7. El tallo de un hongo es de forma cilíndrica, y un tallo de 2 cm de altura y r centímetros de radio tiene un volumen de C centímetros cúbicos, donde $V = 2\pi r^2$. Use diferenciales para calcular el incremento aproximado del volumen del tallo cuando el radio aumenta de 0.4 cm a 0.5 cm.

II. CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO. Identificar, interpretar y analizar

MODELACIÓN PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES. APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE DIFERENCIAL.

Consideremos un ejemplo particular

Uno de los lados de un rectángulo es a = 10 cm, el otro es b = 24 cm. ¿Cómo variará la diagonal l de este rectángulo si el lado a se alarga 4mm y el lado b se acorta 1 mm?
Hallar la magnitud aproximada de la variación y compararla con la exacta.

Para reconocer que se tiene que aplicar el concepto de diferencial se debe:

1.- Identificar en situaciones diversas, el cambio de una función de dos variables evaluada para dos puntos diferentes.

Para el problema enunciado f(x,y) corresponde a l(a,b)
El punto P_0 son los valores iniciales $(a_0, b_0) = (10, 24)$,
el punto P_1 son los valores alterados $(a_1 , b_1) = (10cm + 4mm, 24cm – 1mm)$

2.- Al pedir la variación aproximada se pide hallar el diferencial y la variación exacta es el incremento de la función

3.- En el problema anterior se pide hallar $l(P_1) – l(P_0)$ y dl. Cuando se comparan ambos valores se obtiene el error cometido.

A partir del concepto de diferencial explica la aplicación en el problema particular anterior.

III. SINTETIZAR LAS IDEAS PRINCIPALES

Al leer el texto de una situación descrita mediante palabras, para determinar si se debe de aplicar el concepto de diferencial se necesita identificar:

a. Se está en presencia de la variación de una función f(x,y) considerando dos puntos P_0 y P_1
b. Se va a hallar un valor aproximado del incremento de la función df
c. Se conocen los errores cometidos para cada una de las variables y se desea hallar el error al hacer la aproximación $\Delta f = df + e$

IV. ACCIONES EN EL AULA. SOLUCIÓN DE EJERCICOS Y PROBLEMAS

PROBLEMAS DE MODELACIÓN PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1. De acuerdo con la ley del gas ideal para un gas confinado, si P atmósferas es la presión, V litros es el volumen y T grados es la temperatura absoluta en la escala Kelvin, se tiene la relación PV = kT, donde k es una constante de proporcionalidad. Suponga que el volumen de un gas de cierto recipiente es de 12 litros y que la temperatura es de 290^0 K, con k = 0.6 i) calcula la tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de T si el volumen permanece fijo, ii) Utiliza el resultado obtenido en el inciso anterior para aproximar la variación de la presión si la temperatura se incrementa a 295^0 K, iii) Calcula la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de P si T permanece fija en 290^0 K, iv)Suponiendo que la temperatura permanece constante, utiliza el resultado del inciso anterior para calcular la variación aproximada del volumen necesario para producir la misma variación en la presión que se obtuvo en el inciso ii)

2. Empleando la ley del gas ideal para un gas confinado demostrar que el producto de las derivadas parciales de V respecto a T, por la derivada de T respecto a P, por la derivada de P respecto a V es igual a –1.

3. La temperatura en cualquier punto (x,y) de una placa delgada es T grados, donde $T = 54 - (2/3)\ x^2 - 4y^2$. Si la distancia se mide en centímetros, calcula la tasa de variación de la temperatura con respecto a la distancia recorrida a lo largo de la placa en las direcciones positivas de los ejes x y y respectivamente, en el punto (3,1)

4. Una caja cerrada, cuyas dimensiones exteriores son de 10cm, 8 cm y 6 cm, está hecha de madera contrachapada de 2 mm de espesor. Determina el volumen aproximado del material que se gastó en hacer la caja.

5. El ángulo central de un sector circular es igual a 80° y se desea disminuirlo en 1°. ¿En cuánto hay que alargar el radio del sector para que su área no varíe, si su longitud inicial era igual a 20 cm?

6. El período T de oscilación del péndulo se calcula por la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Donde l es la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad. Hallar el error que se comete al determinar T, como resultado de los pequeños errores **Δl** = α y **Δg** = β cometidos al medir l y g.

7. Al medir un triángulo ABC, se obtuvieron los siguientes datos: el lado a = 100m ±2m. el lado b = 200 m ± 3 m y el ángulo C = 60° ± 1°. ¿Con qué grado de exactitud puede calcularse el lado c?

8. Busca en diferentes libros 5 problemas donde debas de modelar y hallar la diferencial de una función de varias variables. Explica en cada caso por qué utilizas el concepto de diferencial. Señala los errores cometidos. Exponlo en tu equipo.

V. TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASE

a) Para funciones de una y dos variables

-Planteen (utilizando su inventiva e imaginación) para crear una situación hipotética en donde se involucre la aplicación del concepto del diferencial.

-Revisar los resultados obtenidos en forma individual y grupal para dar respuesta a las siguientes preguntas:

1. Corroborar mediante la búsqueda bibliográfica, los resultados a los que llegaron sobre diferencial de una función.

2. ¿Cuáles son las características que debe cumplir la función f para encontrar una aproximación lineal utilizando diferenciales?

3. En general qué puede decir del parámetro $\Delta L \ y \ \Delta f$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

4. ¿A qué equivalencia del término ΔL se puede llegar con los resultados que obtuvo en la hoja de trabajo del diferencial auxiliado del programa en Geogebra Geometry?

5. Geométricamente ¿cómo puede describir el comportamiento de la recta L tangente a la función f cerca del punto x_0?

6. Exprese el concepto de diferencial, geométricamente

7. ¿Sus conclusiones serían las mismas si x_1 estuviera a la izquierda de x_0?

8. ¿La similitud entre la gráfica de f y la recta L, se sigue manteniendo si el crecimiento de la función en el intervalo en que se observa crece o decrece (según sea el caso) de forma rápida o lenta?

9. ¿Qué pasa en los puntos de inflexión con el diferencial de la función y con el comportamiento de las graficas cuando $\Delta x \to 0$?

10. ¿Se necesita que una función sea continua en un punto para que sea diferenciable?

11. ¿Basta con que una función sea continua para que sea diferenciable?

12. Enliste las características que definen el diferencial de una función que depende de una variable.

13. Enumere las condiciones necesarias para que una función sea diferenciable en un punto.

14. Exprese una condición suficiente para que una función sea diferenciable en un punto.

15. Si considera que la función f ahora ya depende de dos variables, ¿Cuáles serían las condiciones de esta para encontrar una aproximación lineal utilizando diferenciales?

16. ¿Se conservan las mismas regularidades que en el caso de una variable?

17. Geométricamente ¿a qué correspondería el diferencial en éste caso?

18. ¿Cómo se calcularía el diferencial en este caso?

19. ¿Cree que se pueda encontrar el diferencial de funciones que dependen de n variables?

20. ¿Considera que se cumplan las propiedades del diferencial que se tienen en el caso de funciones de una variable?
21. ¿Podría describir que sería geométricamente el diferencial de una función de 2 variables?
22. ¿La diferenciabilidad de una función de este tipo implica que podemos encontrar su diferencial?
23. En este caso, ¿la aproximación lineal mediante diferenciales es única?

-Busquen aplicaciones del concepto del diferencial en páginas de internet, libros o revistas de Matemáticas o de otras ciencias.

-Establezca las relaciones entre continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad para funciones de una variable y para funciones de varias variables.

-Expresen las condiciones necesarias para que una función sea diferenciable en el caso de funciones de una variable y en el caso de funciones de varias variables.

-Expresen condiciones suficientes para que una función sea diferenciable.

VI. CONCLUSIONES

a) Para funciones de una variable

Lea detenida y cuidadosamente y luego responda a las siguientes preguntas sobre el tema del diferencial.

-¿Cuáles fueron los conceptos de Cálculo que necesitaste para la comprensión del concepto de diferencial?

-¿Cuál es la expresión matemática de la pendiente de una recta tangente?

-¿Qué entiendes por aproximación lineal?

-¿La tangente a la curva de una función, representa una aproximación lineal?

-¿Se puede encontrar una aproximación lineal de una función que no es continua?

-¿Qué es el diferencial de una función?

-¿El diferencial es una aproximación lineal?

-¿Puede aproximarse por otra función lineal?

-Si puede aproximarse por otra función lineal ¿cuál brinda la mejor aproximación? Justifique su respuesta en base a expresiones matemáticas y representaciones geométricas.

-¿Cuál es la expresión matemática que representa el diferencial de una función en general.

-¿Solamente se puede calcular el diferencial de la variable dependiente?

-¿Cuál es la relación que existe entre la derivada de una función y el diferencial de ella?

-Determina cuales de las siguientes expresiones son verdaderas:

Dada una función *f* definida por la ecuación y=f(x)

a) $\Delta y = \Delta x$
b) $f'(x) = \Delta y$
c) $\Delta y = f'(x)\Delta x$
d) $dy = f'(x)\Delta x$
e) $dx = \Delta x$
f) $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$

b) Para funciones de varias variables

- Responda a las siguientes preguntas para una autoevaluación de conceptos.

1. ¿Qué es una función de varias variables?
2. Enuncie dos ejemplos de funciones de varias variables.
3. ¿Qué características debe cumplir una función de una variable para que sea diferenciable?
4. ¿Qué características debe cumplir una función de varias variables para que sea diferenciable?
5. En el caso de funciones de una variable, ¿cómo se representa la gráfica de su diferencial?
6. En el caso de funciones de más de una variable, ¿cómo se representa la gráfica del diferencial total?
7. ¿Qué significado tiene una aproximación lineal a una función de una variable?
8. ¿Qué significado tiene una aproximación lineal a una función de varias variables?
9. ¿Cuáles son las características matemáticas que comparten los conceptos del diferencial de una función de una variable y el diferencial total?
10. En el caso de las funciones de más de una variable, ¿la diferenciabilidad implica que es posible calcular la diferencial total?

HOJA DE TRABAJO 9.

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

OBJETIVOS:

- Explicar el concepto de óptimo de una función de varias variables.
- Analizar el concepto de óptimo de una función de varias variables como una extensión del caso de una sola variable.
- Interpretar el concepto de óptimo de una función de varias va
  y con restricciones
- Utilizar las condiciones necesarias y las suficientes parael el caso de optimización sin restricciones y para el caso de optimización con restricciones
- Desarrollar la capacidad de utilizar el concepto de óptimo de una función de varias variables en aplicaciones.
- Desarrollar la habilidad para trabajar en grupo o en equipo.

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS A RECORDAR

- OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

DEFINICIÓN: Se dice que una función f(x) tiene un extremo local (mínimo ó máximo) en el punto x_0 si $f(x_0)$ es (menor ó mayor) que f(x) para todos los puntos x diferentes de x_0 pertenecientes a una vecindad pequeña del punto $x_{0.}$

Condición necesaria de óptimo: Una condición necesaria para la existencia de extremo local es que $f'(x_0) = 0$

Condición suficiente de óptimo: Una condición suficiente para la existencia de

Mínimo es que $f''(x_0) > 0$

Máximo es que $f''(x_0) < 0$

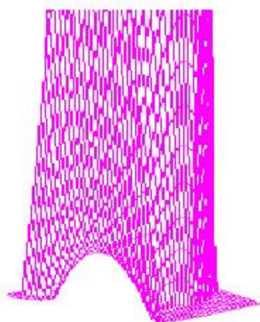
Dibuja un ejemplo gráfico de función de una variable, donde un valor de máximo local o relativo tenga menor valor que uno de min local.

II. CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO. Identificar, interpretar y analizar

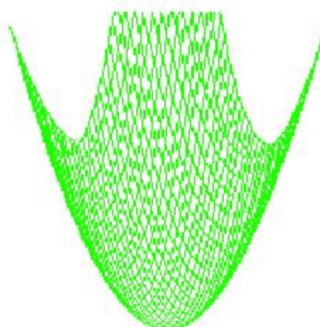
CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE EXTREMO RELATIVO DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

- Define vecindad de un punto situado en el eje real
- Define vecindad de un punto situado en el plano real
- Define vecindad de un punto situado en el espacio real
- A partir del gráfico en Wimplot de las funciones siguientes buscar analogía en la definición de extremo relativo para funciones de una variable
- Por analogía con el caso de funciones de una variable piensa en las condiciones necesarias y suficientes de extremo relativo para el caso de funciones de dos variables. Explica tus ideas.
- Al considerar funciones de dos variables ¿qué tipo de derivadas debes de tomar en cuenta para las condiciones necesarias y suficientes de extremo relativo?

$$Z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$



$$C = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2\,x_2^2$$



- **OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES SIN RESTRICCIONES**

Sea z = f(x,y) la función que se desea hallar los extremos relativos

Condición necesaria de extremo: $f_x = 0$ $f_y = 0$

Condición suficiente de extremo: $H(x_i, y_i) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} (x_i, y_i)$

H positiva indica que el punto (x_i, y_i) es un mínimo relativo

H negativa indica que el punto (x_i, y_i) es un máximo relativo

$z(x_i, y_i)$ da el valor óptimo de la función

- **GENERALIZACIÓN PARA OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE N VARIABLES SIN RESTRICCIONES**

Sea $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ la función que se desea hallar los extremos relativos

Condición necesaria de extremo: $f_{xi} = 0$ $i = 1,.....,n$

Condición suficiente de extremo: $H(x_i) = \begin{matrix} f_{x1x1} & f_{x1x2} & \ldots & f_{x1xn} \\ f_{x2x1} & f_{x2x2} & \ldots & f_{x2xn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{xnx1} & f_{xnx2} & \ldots & f_{xnxn} \end{matrix} (x_i)$

H positiva indica que el punto (x_i) es un mínimo relativo

H negativa indica que el punto (x_i) es un máximo relativo $z(x_i, y_i)$ da el valor óptimo de la función

Ejemplos

1.-Determinar los extremos relativos o locales de la función $Z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Condición necesaria

$Z_x =$

$Z_y =$

Resolver el sistema de ecuaciones

$x^2 + y^2 - 5 = 0$

$xy - 2 = 0$

$P_1 (1;2)$; $P_2 (2;1)$; $P_3 (-1;-2)$; $P_4 (-2;-1)$

Hallar las segundas derivadas y determinar el signo del Hesiano

2.- x_i representa el nivel de producción del i-ésimo producto por unidad de tiempo. La función de coste de la empresa está dada por

$$C = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2\,x_2^2$$

Halle el extremo relativo de la función de coste.

3.-Considere que los precios de los productos varían según los niveles de producción, no se considera la acumulación de inventario.

$Q_1 = 40 – 2P_1 + P_2$ $\qquad\qquad$ $Q_2 = 15 + P_1 - P_2$

Estas ecuaciones indican que los bienes están relacionados con su consumo, son bienes sustitutivos, pues el aumento de uno aumentará la demanda del otro.

Expresar P_1 y P_2 en función de los niveles de producción

La función de ingreso total de la empresa dada por $R = P_1Q_1 + P_2Q_2$ puede escribirse entonces en función de los niveles de producción solamente sustituyendo los valores de los precios hallados anteriormente.

Suponiendo que la función de coste total es $\quad C = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2\,Q_2^2$

Determinar la función de beneficio $\quad P = R – C$

Y hallar el máximo beneficio

- **OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES CON RESTRICCIONES**

Sea f(x,y) una función que se desea optimizar, las variables independientes están ligadas por la ecuación g(x,y) = 0

Se forma la función de Lagrange $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$

λ es un valor indeterminado y se le denomina multiplicador de Lagrange

Los problemas

P {min f(x,y) S.A. g(x,y)=0 $\quad$ y $\quad$ P´ { $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$

Son equivalentes en el sentido que una solución (x_i,y_i, λ_i) de P´ da una solución (x_i,y_i) de P y viceversa

Condición necesaria: $F_x = 0$; $F_y = 0$; $\partial F/\partial\lambda = 0$

Condición suficiente: $H(F)\ (x_i\ ,y_i,\ \lambda_i) > 0$ min
$H(F)\ (x_i\ ,y_i,\ \lambda_i) < 0$ max

Ejemplos

1. Hallar los extremos relativos de la función $Z = 6 - 4x - 3y$ S.A. $x^2 + y^2 = 1$

Función de Lagrange:

Expresa la Condición necesaria:

P_1 (4/5; 3/5; 5/2) P_2 (-4/5; -3/5; -5/2)

Expresa la Condición suficiente:

$Z_{max} = 11$

$Z_{min} = 1$

2. Determinar los valores máximo y mínimo de la función $Z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y$ S.A. $3x + 2y = 1$

Función de Lagrange:

Expresa la Condición necesaria:

P_1 (; ;) P_2 (; ;)

Expresa la Condición suficiente:

$Z_{max} =$

$Z_{min} =$

- GENERALIZACIÓN PARA FUNCIONES DE N VARIABLES CON RESTRICCIONES

- Plantea la definición de extremo relativo de funciones de n variables
- Expresa la condición necesaria de existencia de extremo para funciones de n variables
- Expresa la condición suficiente de extremo para funciones de n variables

III. SINTETIZAR LAS IDEAS PRINCIPALES

Sintetizar las ideas principales

- Señalar las características de cada uno de los conceptos.
- Expresar la forma de aplicar esas características en cada uno de los ejercicios anteriores.

Establecer conjetura

- Relacionar los conceptos con los ejercicios.
- Formular estrategias de trabajo para enfocar los diferentes ejercicios haciendo uso de la teoría.

IV. ACCIONES EN EL AULA. SOLUCIÓN DE EJERCICOS Y PROBLEMAS

- Integrar al grupo en equipos
- Cada equipo debe de buscar en diferentes libros un conjunto de ejercicios diferentes donde se apliquen los conceptos.
- Dar solución a los diferentes ejemplos vistos.
- Relacionar la solución gráfica con la algebraica.
- Exposición de trabajo y generar discusión.

V. TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASE

- Buscar en diferentes libros, seleccionar y resolver 5 ejercicios de extremos relativos sin restricciones y 5 de extremos relativos con restricciones
- Cada miembro del equipo debe de exponer sus ejercicios a los otros y discutirlos en asamblea

VI. CONCLUSIONES

- Realizar un resumen de la hoja señalando los aspectos comunes y las diferencias para extremos sin restricciones y con restricciones de funciones de 1 y de varias variables.

HOJA DE TRABAJO 10. INTEGRALES DOBLES

OBJETIVOS:

- Explicar el concepto de integral doble de una función de dos variables.
- Analizar el concepto de integral doble de una función de dos variables como una extensión del caso de una sola variable.
- Interpretar las propiedades de la integral doble de una función de dos variables.
- Desarrollar la capacidad de utilizar el concepto de integral múltiple de una función de dos variables en aplicaciones.
- Desarrollar la habilidad para trabajar en grupo o en equipo.

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS PARA RECORDAR

Responde lo que recuerdes:

- Se denomina partición regular de un intervalo a
- La interpretación geométrica de la integral definida está dada por
- La integral definida se define como
- La notación de integral definida es
- ¿Qué propiedades se cumplen para la integral definida?
- En caso de elegir la opción a) del inciso anterior, ¿Cómo logras estirar una curva cualquiera?
- En caso de elegir la opción b), ¿Qué tipo de partición del intervalo sugieres?, justifica tu elección ¿Cómo puedes hallar el valor del segmento de recta $P_i\, P_{i+1}$? Y ¿Cómo expresas la suma de todos los segmentos? ¿Consideras que puedes utilizar el concepto de integral definida para hallar la longitud de la curva? Justifica tu respuesta y explica tu idea.

- En caso de elegir la opción c) Expresa matemáticamente tu estrategia.

- **CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DOBLE. Identificar, interpretar, relacionar y analizar**

  - La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ se refiere a la función f(x) definida sobre un intervalo $a \leq x \leq b$. En dicho intervalo se considera una partición P = $\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

i.- Señala en un gráfico la partición P,

ii.- Identifica el intervalo [a,b] e interpreta geométricamente el límite de la sumatoria, explica tu interpretación mediante lenguaje natural.

  - La integral doble $\iint_R f(x,y)dxdy$ se refiere a la función f(x,y) definida sobre una región finita cerrada R sobre el plano XY. La región R se encuentra dentro de un rectángulo D = [a,b]x[c,d] = $\{(x,y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$.

Sea P una partición de D formada por el producto cartesiano de las particiones P_x y P_y $P_x = \{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$; $P_y = \{y_0,y_1,y_2,\ldots,y_m\}$

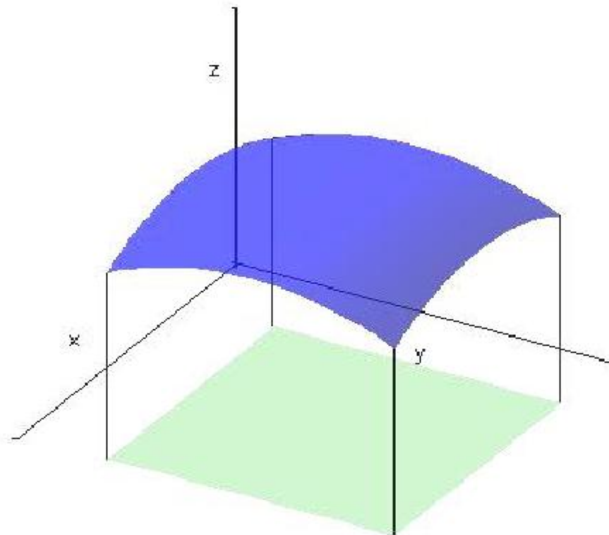
$$P = P_x \text{ x } P_y$$

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta A_{ij} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(c_i,d_j)\Delta A_{ij}$$

i.- Señala en un gráfico las particiones P, P_x y P_y

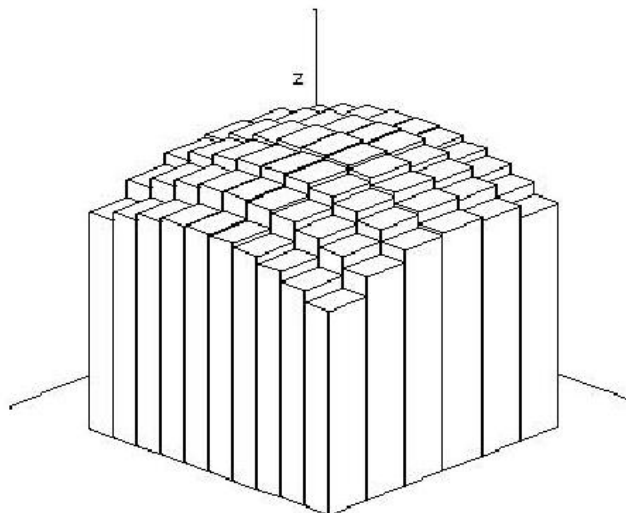
ii.- Identifica el rectángulo D e interpreta geométricamente el límite de la doble sumatoria, explica tu interpretación mediante lenguaje natural.

- Interpretación de la integral doble como volumen



- Considera el volumen del cuerpo sólido V formado por el rectángulo en el plano XY y la función $z = f(x,y)$. Relaciona la forma de hallar el volumen con la definición de integral doble

- Establece la analogía y la diferencia con la interpretación de integral definida como área bajo una curva.



- **Teorema:**

<u>Si</u> f(x,y) es continua en una región cerrada R (*) $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$

ó (**) $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$

<u>Entonces</u> $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ es una función continua de x **ó**

$\int_{x_1(y}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ es una función continua de y

Y se satisface $\iint_R f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2}(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy)\, dx$ (integral iterada)

ó $\iint_R f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2}(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx)\, dy$ (integral iterada)

Ejemplos

1.- Sea R el sector de un cuarto de círculo $0 \leq y \leq \sqrt[2]{1-x^2}$; $0 \leq x \leq 1$. Sea f(x,y) = $x^2 + y^2$ Hallar el volumen del cuerpo sólido que tiene por base la región R y está limitado por la función f(x,y)

i) Determina si la región R está expresada como función de x ó de y

ii) Señala la forma de hallar la integral doble mediante integrales iteradas

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2}(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy)\, dx$$

iii) Determina si se cumple el teorema

iv) Escribe los límites de integración de las integrales iteradas

$$\iint_R (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1(\int_0^{\sqrt[2]{1-x^2}} (x^2+y^2)dy)dx$$

v) Halla las integrales iteradas

2.- Sea V el volumen del sólido debajo de la superficie z = 36 - $x^2 - y^2$ y sobre el rectángulo D = [0,4]x[0,4]

i) Determina la región R

ii) Expresa f(x,y)

iii) Determina si se cumple el teorema

iv) Señala la forma de hallar la integral doble mediante integrales iteradas

$$\iint_R (x^2+y^2)dxdy \;= \int_0^4 (\int_0^4 (36 - x^2 - y^2)dy)dx$$

$$\int_0^4 (\int_0^4 (36 - x^2 - y^2)dx)dy$$

v) Halla las integrales iteradas

3.-Hallar $\iint_R (x^2+y^2)dxdy$ donde R es el triángulo con vértices (0,0) ; (1,0) ; (1,1)

i) Determina si se cumple el teorema

ii) Señala la forma de hallar la integral doble mediante integrales iteradas

iii) Halla las integrales iteradas

4.- Hallar el valor de las siguientes integrales iteradas. Señalar f(x,y) y R. Interpretar el significado de cada una de las integrales en términos de áreas o volúmenes. Hacer los gráficos.

i) $\int_0^3 \int_0^2 (x^2+4y)\,dxdy$ ii) $\int_0^2 \int_0^3 (x^2+4y)dydx$

iii) $\int_{-1}^1 \int_0^3 (1-y)\,dxdy$ iv) $\int_0^3 \int_{-1}^1 (1-y)\,dydx$

v) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx$ vi) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dydx$

vii) $\int_0^2 \int_{-\sqrt[2]{4-y^2}}^{\sqrt[2]{4-y^2}} dxdy$ viii) $\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt[2]{x}dxdy$

- **PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DOBLE**

1. **Linealidad:** Sean f y g dos funciones reales y continuas definidas en una región D, f: $R^2 \rightarrow R$ g: $R^2 \rightarrow R$ α y β dos números reales cualesquiera, entonces

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dA = \iint_D [\alpha\, f(x,y)]dA + \iint_D [\beta g(x,y)]dA$$

2. **Orden:** Sean f y dos funciones reales y continuas definidas en una región D, f: $R^2 \rightarrow R$ g: $R^2 \rightarrow R$, tales que $f(x,y) \geq g(x,y)$ $\forall$ $(x,y) \in D$, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA$$

3. **Aditiva respecto a la región de integración:** Sean f una función real y continua definidas en una región D, f: $R^2 \rightarrow R$. Si la región D está dividida en dos subregiones D_1 y D_2 $D = D_1 \cup D_2$, entonces

$$\iint_D [f(x,y)]dA = \iint_{D_1}[f(x,y)]dA + \iint_{D_2} [f(x,y)]dA$$

Ejemplos:

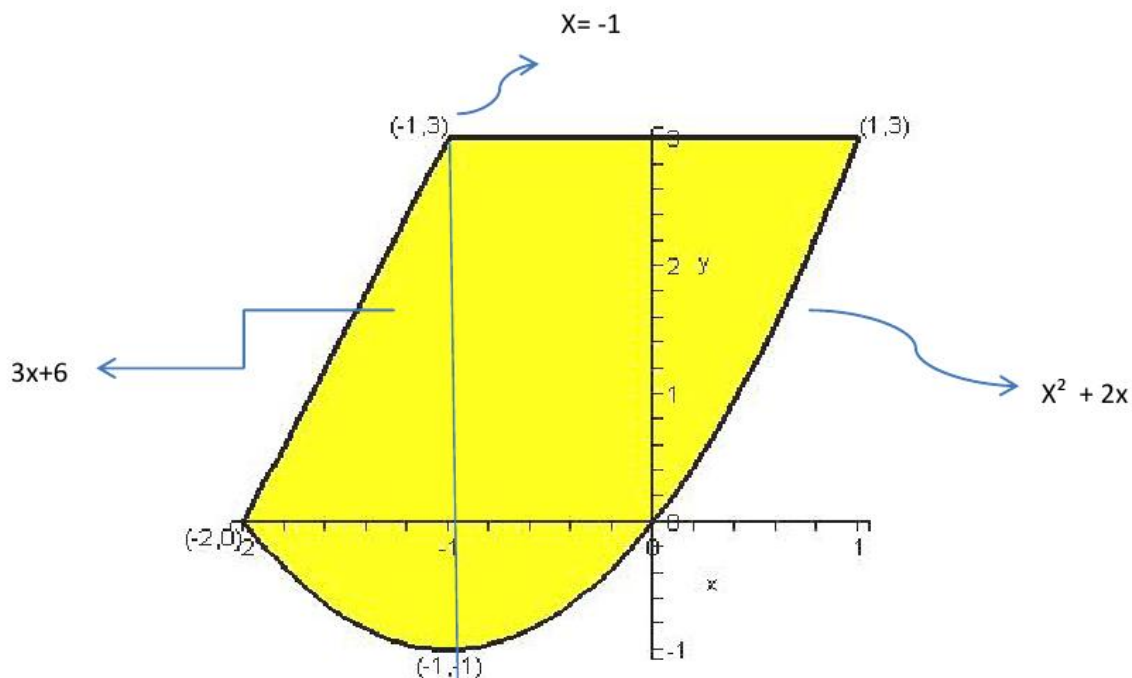
1.- Hallar el valor de la integral doble en la región. Interpretar el significado de la integral

$$D = \{ (x,y) : y \geq x^2 + 2x \wedge y \leq 3 \wedge y \leq 3x + 6 \}$$

$$\iint_D (x + y + 1)dxdy$$

$$D_1 = \{ (x,y) : -2 \leq x \leq -1 \wedge x^2 + 2x \leq y \leq 3x + 6 \}$$

$$D_2 = \{ (x,y) : -1 \leq x \leq 1 \wedge x^2 + 2x \leq y \leq 3 \}$$



2.- Hallar el valor de la integral doble en la región D. Dibujar la región e interpretar el significado de la integral.

$$D = \{ (x,y) : |y - x| \leq 2 \wedge x^2+y^2 \leq 4 \}$$

$$\iint_D (10 + 4x^2 - y)dxdy$$

III . SINTETIZAR LAS IDEAS PRINCIPALES

- Señalar las características comunes de cada uno de los conceptos.
- Expresar la forma de aplicar esas características en cada uno de los ejercicios anteriores.
- Relacionar los conceptos con los ejercicios.
- Formular estrategias de trabajo para enfocar los diferentes ejercicios haciendo uso de la teoría.

IV. ACCIONES EN EL AULA. SOLUCIÓN DE EJERCICOS Y PROBLEMAS

- Integrar al grupo en equipos
- Cada equipo debe de buscar en diferentes libros un conjunto de ejercicios diferentes donde se apliquen los conceptos.
- Dar solución a los diferentes ejemplos vistos.
- Relacionar la solución gráfica con la de lenguaje matemático.
- Exposición de trabajo y generar discusión.

V. TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASE

Cada estudiante debe de

- Expresar la definición de partición de un intervalo y partición de un rectángulo. Relacionar ambas definiciones, establecer las diferencias.
- Expresar de concepto de integral definida y el de integrales dobles. Relacionar ambas definiciones, establecer las diferencias.

- Expresar casos generales donde se apliquen diferentes propiedades de las integrales definidas y de las integrales dobles. Relacionarlas, establecer las diferencias
- Cada miembro del equipo debe de exponer y discutir en asamblea.

VI. CONCLUSIONES

Realizar un resumen de la hoja señalando los aspectos comunes y las diferencias para el trabajo con integrales de funciones de una y de dos variables.

http://www.ing.uc.edu.ve/~gcisneros/pdf/IntDobles.pdf

HOJA DE TRABAJO 11. INTEGRALES TRIPLES

OBJETIVOS:

- Explicar el concepto de integral múltiple de una función de varias variables.
- Analizar el concepto de integral múltiple de una función de varias variables como una extensión del caso de una sola variable.
- Interpretar las propiedades de la integral múltiple de una función de varias variables.
- Desarrollar la habilidad para trabajar en grupo o en equipo.

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS PARA RECORDAR

a) Responde lo que recuerdes:

- Se denomina partición regular de un intervalo a

- La interpretación geométrica de la integral definida está dada por

- La integral definida se define como

- La notación de integral definida es

- ¿Qué propiedades se cumplen para la integral definida?

- La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ se refiere a la función f(x) definida sobre un intervalo $a \leq x \leq b$. En dicho intervalo se considera una partición P = $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

  i.- Señala en un gráfico la partición P,

  ii.- Identifica el intervalo [a,b] e interpreta geométricamente el límite de la sumatoria, explica tu interpretación mediante lenguaje natural.

- La integral doble $\iint_R f(x,y)dxdy$ se refiere a la función f(x,y) definida sobre una región finita cerrada R sobre el plano XY. La región R se encuentra dentro de un rectángulo D = [a,b]x[c,d] = {(x,y) $\boldsymbol{\epsilon}$ R^2 | a ≤ x≤b ∧ c≤y≤d}.

Sea P una partición de D formada por el producto cartesiano de las particiones P_x y P_y P = P_x x P_y

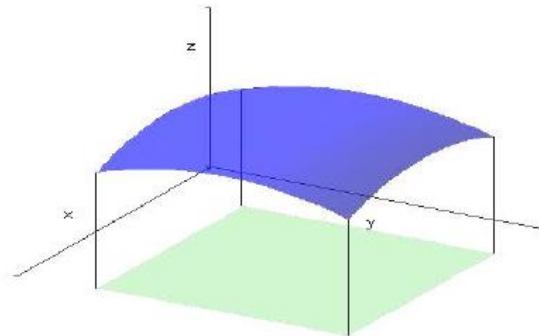
P_x = $\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$; P_y = $\{y_0,y_1,y_2,\ldots,y_m\}$

$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta A_{ij}\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(c_i,d_j)\Delta A_{ij}$

i.- Señala en un gráfico las particiones P, P_x y P_y

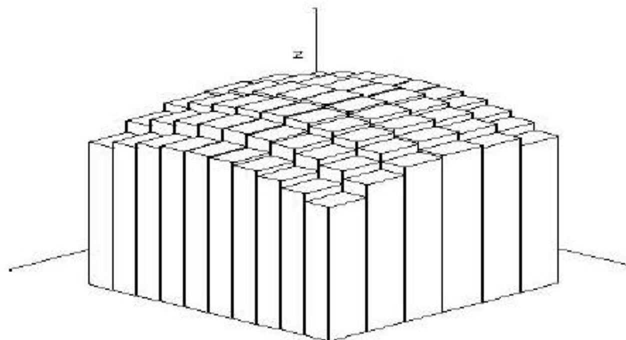
ii.- Identifica el rectángulo D e interpreta geométricamente el límite de la doble sumatoria, explica tu interpretación mediante lenguaje natural.

- Interpretación de la integral doble como volumen



- Considera el volumen del cuerpo sólido V formado por el rectángulo en el plano XY y la función z = f(x,y). Relaciona la forma de hallar el volumen con la definición de integral doble

- Establece la analogía y la diferencia con la interpretación de integral definida como área bajo una curva.



- **Teorema:**

Si f(x,y) es continua en una región cerrada R (*) $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$

ó (**) $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$

Entonces $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ es una función continua de x **ó**

$\int_{x_1(y}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ es una función continua de y

Y se satisface $\iint_R f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2}(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy)\, dx$ (integral iterada)

ó $\iint_R f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2}(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx)\, dy$ (integral iterada)

- **PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DOBLE**

4. **Linealidad:** Sean f y g dos funciones reales y continuas definidas en una región D, f: $R^2 \rightarrow R$ g: $R^2 \rightarrow R$ α y β dos números reales cualesquiera, entonces

$$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]dA = \iint_D [\alpha\, f(x,y)]dA + \iint_D [\beta g(x,y)]dA$$

5. **Orden:** Sean f y dos funciones reales y continuas definidas en una región D, f: $R^2 \rightarrow R$ g: $R^2 \rightarrow R$, tales que f(x,y) ≥ g(x,y) ∀ (x,y) ∈ D, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA$$

6. **Aditiva respecto a la región de integración:** Sean f una función real y continua definidas en una región D, f: $R^2 \rightarrow R$. Si la región D está dividida en dos subregiones D_1 y D_2 $D = D_1 \cup D_2$, entonces

$$\iint_D [f(x,y)]dA = \iint_{D_1}[f(x,y)]dA + \iint_{D_2} [f(x,y)]dA$$

II. CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO. Identificar, interpretar y analizar

- **La integral triple puede analizarse como una extensión del concepto de integral doble**

Sea una función f : $R^3 \rightarrow R$ definida sobre una región general

B = {(x,y,z) : (x,y) $\in$ D $\wedge$ z_1 (x,y) $\leq$ z $\leq$ z_2 (x,y)} contenida en un paralelepípedo

P = {(x,y,z) : a $\leq$ x $\leq$ b $\wedge$ c $\leq$ y $\leq$ d $\wedge$ e $\leq$ z $\leq$ f },

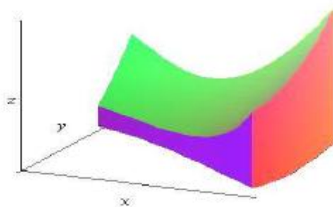
Sea P una partición del paralelepípedo P obtenida por el producto cartesiano de las particiones P_x, P_y; P_z de los intervalos [a,b], [c,d] y [e,f]

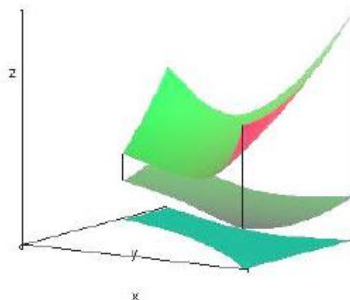
$P_x = \{ x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \}$; $P_y = \{ y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m \}$; $P_z = \{ z_0, z_1, z_2, \ldots, z_l \}$

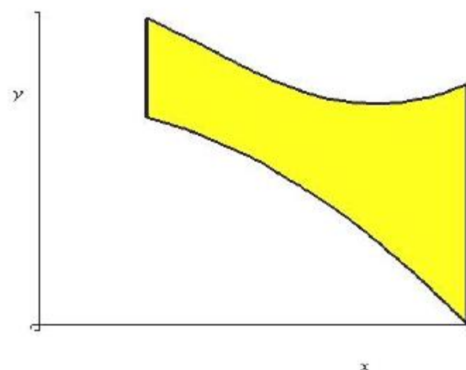
La integral triple

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{\Delta V_{ijk} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} f(a_i, c_j, e_k) \Delta V_{ijk}$$

Donde $a_i \in [a,b]$; $c_j \in [c,d]$; $e_k \in$ e $[e,f]$







Cuando f(x,y,z) = 1, al hallar la integral se obtiene el volumen de la región B

Teorema de Fubini para integrales triples: Sea f una función continua en el paralelepípedo P = [a,b] x [c,d] x [e,f] entonces

$$\iiint_P f(x,y,z)dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

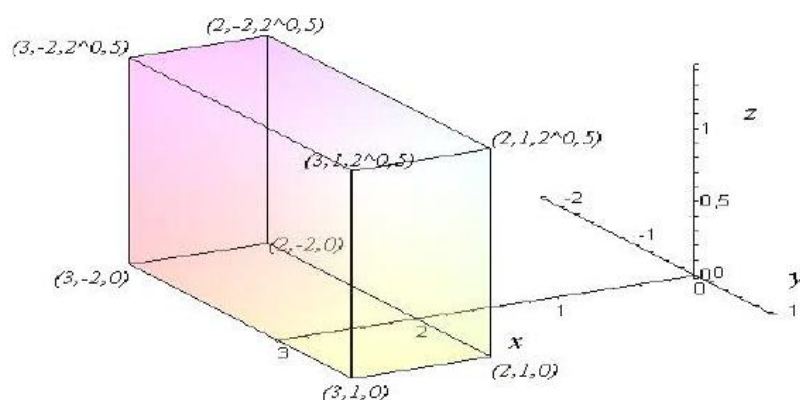
El orden de integración de las integrales iteradas se selecciona a conveniencia, pudiendo ser dxdydz , dxdzdy ; dydxdz ; dydzdx ; dzdxdy ; dzdydx

Ejemplos:

Ejemplo 1

Hallar el valor de la integral triple donde $f(x,y,z) = xz^3(1-y)$ y $B = [2,3] \times [-2,1] \times [0,\sqrt{2}]$

$$\iiint_P f(x,y,z)dV = \int_0^{\sqrt[2]{2}} \int_{-2}^{1} \int_2^3 xz^3(1-y)dxdydz$$



Ejemplo 2

Hallar el valor de la integral triple donde la región B está definida por

$\{(x,y,z) : o \leq x \leq 2 \;\wedge x \leq y \leq x^2 \;\wedge\; x + y \leq z \leq x^2 + y^2\}$

$$\iiint_P f(x,y,z)dV = \int_0^2 \int_x^{x^2} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dzdydx$$

- **PROPIEDADES DE LA INTEGRAL TRIPLE**

Linealidad: Sean f y g dos funciones reales y continuas definidas en una región D, f: $R^3 \longrightarrow R$ g: $R^3 \longrightarrow R$ α y β dos números reales cualesquiera, entonces

$$\iiint_B [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)]dV = \iiint_B [\alpha\, f(x,y,z)]dV + \iiint_B [\ \beta g(x,y,z)]dV$$

Orden: Sean f y dos funciones reales y continuas definidas en una región B, f: $R^3 \longrightarrow R$ g: $R^3 \longrightarrow R$, tales que $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ $\forall$ $(x,y,z) \in B$, entonces

$$\iiint_B f(x,y,z)dV \geq \iiint_B g(x,y,z)dV$$

Aditiva respecto a la región de integración: Sean f una función real y continua definidas en una región B, f: $R^3 \longrightarrow R$. Si la región B está dividida en dos subregiones B_1 y B_2 $B = B_1 \cup B_2$, entonces

$$\iiint_{\boldsymbol{B}} [f(x,y,z)]dV = \iiint_{B_1} [\ f(x,y,z)]dV + \iiint_{B_2} [\ f(x,y,z)]dV$$

Ejemplos.

Hallar el valor de la integral triple donde f(x,yz) = xyz y

$B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4 \ ; \ x^2+y^2 \geq 1 \ ; \ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \ ; \ z \geq 0 \ \}$

III. SINTETIZAR LAS IDEAS PRINCIPALES

- Señalar las características comunes de cada uno de los conceptos.
- Expresar la forma de aplicar esas características en cada uno de los ejercicios anteriores.
- Relacionar los conceptos con los ejercicios.
- Formular estrategias de trabajo para enfocar los diferentes ejercicios haciendo uso de la teoría.

IV. ACCIONES EN EL AULA, SOLUCIÓN DE EJERCICOS Y PROBLEMAS

- Integrar al grupo en equipos
- Cada equipo debe de buscar en diferentes libros un conjunto de ejercicios diferentes donde se apliquen los conceptos.
- Dar solución a los diferentes ejemplos.
- Relacionar la solución gráfica con la de lenguaje matemático.
- Exposición de trabajo y generar discusión.

V. TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASE

Cada estudiante debe de

- Expresar la definición de partición de un intervalo y partición de un rectángulo. Relacionar ambas definiciones, establecer las diferencias.
- Expresar de concepto de integral definida y el de integrales dobles. Relacionar ambas definiciones, establecer las diferencias.
- Expresar casos generales donde se apliquen diferentes propiedades de las integrales definidas y de las integrales dobles. Relacionarlas, establecer las diferencias
- Cada miembro del equipo debe de exponer y discutir en asamblea.

VI. CONCLUSIONES

Realizar un resumen de la hoja señalando los aspectos comunes y las diferencias para el trabajo con integrales de funciones de una, de dos variables y de tres variables.

http://www.ing.uc.edu.ve/~gcisneros/pdf/IntTriples.pdf

Hoja de Trabajo 12.

Aplicaciones de las integrales múltiples

OBJETIVOS:

- Explicar el concepto de integral múltiple de una función de varias variables.
- Analizar el concepto de integral múltiple de una función de varias variables como una extensión del caso de una sola variable.
- Interpretar el concepto de integral múltiple de una función de varias variables cómo área, volumen, masa, centro de masa, momento de inercia.
- Desarrollar la capacidad de utilizar el concepto de integral múltiple de una función de varias variables en aplicaciones.
- Desarrollar la habilidad para trabajar en grupo o en equipo.

I. CONOCIMIENTOS PREVIOS: CONCEPTOS PARA RECORDAR

a) Responde lo que recuerdes:

- Se denomina partición regular de un intervalo a

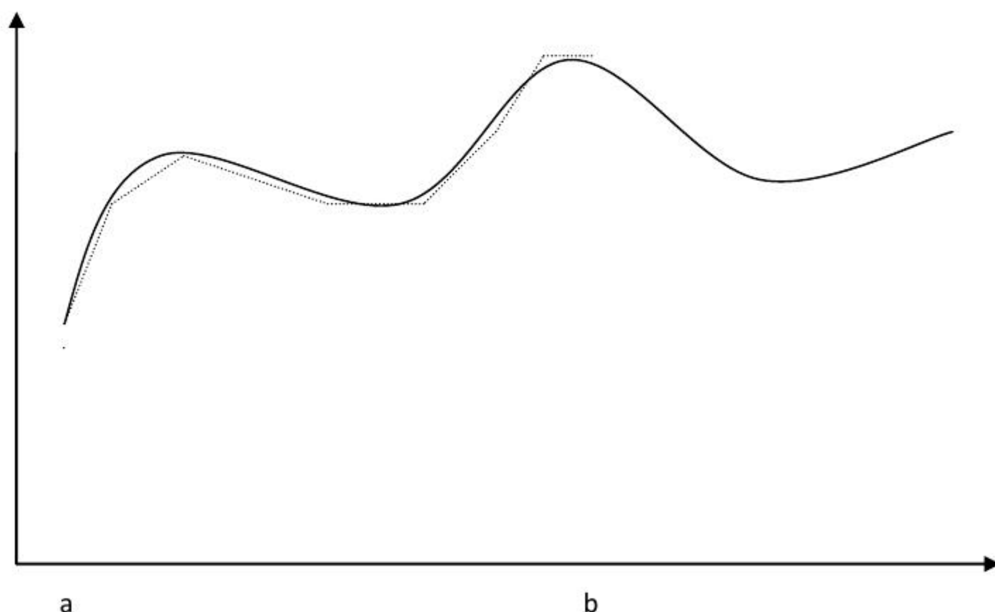
- La interpretación geométrica de la integral definida está dada por

- La integral definida se define como

- La notación de integral definida es

- ¿Qué propiedades se cumplen para la integral definida?

- Considera que te dan una curva como la que aparece en la figura y te piden calcular su longitud en el intervalo [a,b]. ¿Cómo hallarías su longitud?
  a) Estirando la curva y midiendo.
  b) Dividiendo el intervalo y considerando en cada subintervalo una aproximación lineal $P_i P_{i+1}$
  c) Mediante otra estrategia que tu sugieras.



- En caso de elegir la opción a) del inciso anterior, ¿Cómo logras estirar una curva cualquiera?

- En caso de elegir la opción b), ¿Qué tipo de partición del intervalo sugieres?, justifica tu elección ¿Cómo puedes hallar el valor del segmento de recta $P_i\ P_{i+1}$? Y ¿Cómo expresas la suma de todos los segmentos? ¿Consideras que puedes utilizar el concepto de integral definida para hallar la longitud de la curva? Justifica tu respuesta y explica tu idea.

- En caso de elegir la opción c) Expresa matemáticamente tu estrategia.

b) A partir de conceptos físicos, relaciona estos con la integral definida.

- El concepto de masa de una barra de longitud L con una densidad lineal en un punto situado a x metros del origen, dada por $\rho(x)$, se da como

$$M = \lim \sum_{i=1}^{n} \rho(w_i)\ \ \Delta_i(x)$$

Expresa este concepto como una integral definida y explica por qué puedes hacerlo, su interpretación matemática y física. Considera uno de los extremos en el origen.

- El momento de masa de una barra de longitud L considerando uno de sus extremos en el origen se define como $M_0 = \lim \sum_{i=1}^{n} w_i \, \rho(w_i) \, \Delta_i x$ Expresa este concepto como una integral definida y explica por qué puedes hacerlo, su interpretación matemática y física.

- El momento de masa con respecto al eje x, de una placa delgada de masa distribuida en forma continua (a esta placa se le llama lámina), de dos dimensiones está dado por $M_x = \lim \sum_{i=1}^{n} 1/2 \, k \, |f(w_i)| \, \Delta_i x$ donde se considera que la densidad de área es constante e igual a k kilogramos por metro cuadrado. La lámina se encuentra limitada por la curva y = f(x), el eje x y las rectas x = a, x = b. Expresa este concepto como una integral definida y explica por qué puedes hacerlo, su interpretación matemática y física.

- En física se utiliza el término trabajo para caracterizar la energía de movimiento de un cuerpo cuando éste es movido cierta distancia debido a la fuerza que actúa sobre él. Si f(x) unidades de fuerza actúan sobre un objeto en el punto x del eje x, W unidades es el trabajo realizado por la fuerza conforme el objeto se desplaza de a a b, entonces $W = \lim \sum_{i=1}^{n} f(w_i) \, \Delta_i x$ Expresa este concepto como una integral definida y explica por qué puedes hacerlo, su interpretación matemática y física.

- Compara los conceptos físicos anteriores y establece la similitud de todos ellos en cuanto a su expresión matemática y la diferencia del concepto físico en si. ¿Cómo puedes expresar de manera general la conclusión a la cual has llegado?

c) Busca en cualquier bibliografía de Cálculo y expresa las características de:

- Concepto de Longitud de arco del gráfico de una función
- Concepto de momento de masa
- Concepto de centro de masa
-
- Concepto de centroide
- Concepto de trabajo

III. APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL MÚLTIPLE. Identificar, interpretar y analizar

- La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ se refiere a la función f(x) definida sobre un intervalo $a \leq x \leq b$. En dicho intervalo se considera una partición $P = \{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

i.- Señala en un gráfico la partición P,

ii.- Identifica el intervalo [a,b] e interpreta geométricamente el límite de la sumatoria, explica tu interpretación mediante lenguaje natural.

- La integral doble $\iint_R f(x,y)dxdy$ se refiere a la función f(x,y) definida sobre una región finita cerrada R sobre el plano XY. La región R se encuentra dentro de un rectángulo $D = [a,b]x[c,d] = \{(x,y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$.

Sea P una partición de D formada por el producto cartesiano de las particiones P_x y P_y $P = P_x \text{ x } P_y$

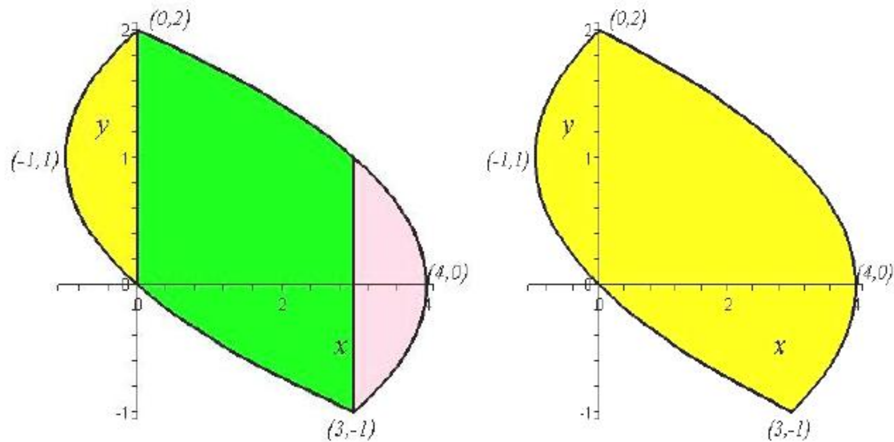
$P_x = \{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$; $P_y = \{y_0,y_1,y_2,\ldots,y_m\}$

$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta A_{ij} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(c_i,d_j)\Delta A_{ij}$

i.- Señala en un gráfico las particiones P, P_x y P_y

ii.- Identifica el rectángulo D e interpreta geométricamente el límite de la doble sumatoria, explica tu interpretación mediante lenguaje natural.

iii.- Cuando $f(c_i,d_j) = 1$ ¿consideras que puedes interpretar la integral doble como área de una cierta región? Explica tus criterios en base a la definición.



iv.- Expresa dos funciones cualesquiera $x_1(y)$ y $x_2(y)$ en un graficador y a partir del gráfico establece el área de la región por medio de la integral doble.

v.- Expresa dos funciones cualesquiera $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en un graficador y a partir del gráfico establece el área de la región por medio de la integral doble.

vi.- Analiza diferentes situaciones y explica el procedimiento a seguir para dividir la región a determinar el área en diferentes subregiones, utilizando la propiedad aditiva respecto a la región de integración.

vii.- Explica cuando es conveniente expresar x en función de y y cuando es conveniente expresar y en función de x.

viii.- En el caso que la función $f(c_i, d_j)$ represente la densidad variable de una región plana ¿cómo interpretas el valor de la integral doble?

ix.- Dado que el momento de masa de una barra de longitud L considerando uno de sus extremos en el origen se define como $M_0 = \lim \sum_{i=1}^{n} w_i \, \rho(w_i) \, \Delta_i x$ y que este concepto se puede expresar como una integral definida y explica por qué puedes hacerlo, su interpretación matemática y física.

x.- El momento de masa con respecto al eje x, de una placa delgada de masa distribuida en forma continua (a esta placa se le llama lámina), de dos dimensiones está dado por $M_x = \lim \sum_{i=1}^{n} 1/2\ k\ |f(w_i)|\ \Delta_i x$ donde se considera que la densidad de área es constante e igual a k kilogramos por metro cuadrado. La lámina se encuentra limitada por la curva y = f(x), el eje x y las rectas x = a, x = b. Expresa este concepto como una integral definida y explica por qué puedes hacerlo, su interpretación matemática y física.
Relaciona estas definiciones con las de
momento estático alrededor del eje x dado por $M_x \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j \rho(c_i, d_j)\Delta A_{ij}$ y momento estático alrededor del eje y dado por $M_y \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \rho(c_i, d_j)\Delta A_{ij}$
Interpretarlos como integrales dobles.

xi.- El centro de gravedad de una figura plana D está dado por
$x = M_y / m$ $y = M_x / m$
donde m es la masa de la placa D expresa el centro de gravedad como integrales dobles

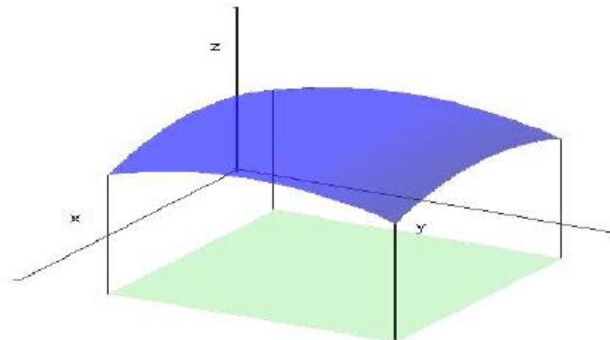
xii.- Momento de inercia

Momento de inercia alrededor del eje x $I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dA$

Momento de inercia alrededor del eje y $I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dA$

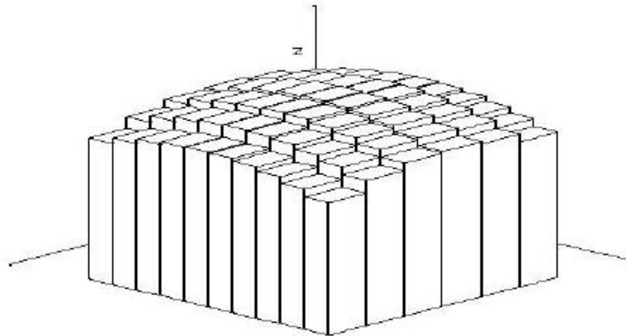
Momento polar de inercia $I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dA$

- Interpretación de la integral doble como volumen



- Considera el volumen del cuerpo sólido V formado por el rectángulo en el plano XY y la función z = f(x,y). Relaciona la forma de hallar el volumen con la definición de integral doble

- Establece la analogía y la diferencia con la interpretación de integral definida como área bajo una curva.



- La integral triple puede analizarse como una extensión del concepto de integral doble

Sea una función f : $R^3 \rightarrow R$ definida sobre una región general

$B = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \wedge z_1 (x,y) \leq z \leq z_2 (x,y)\}$ contenida en un paralelepípedo

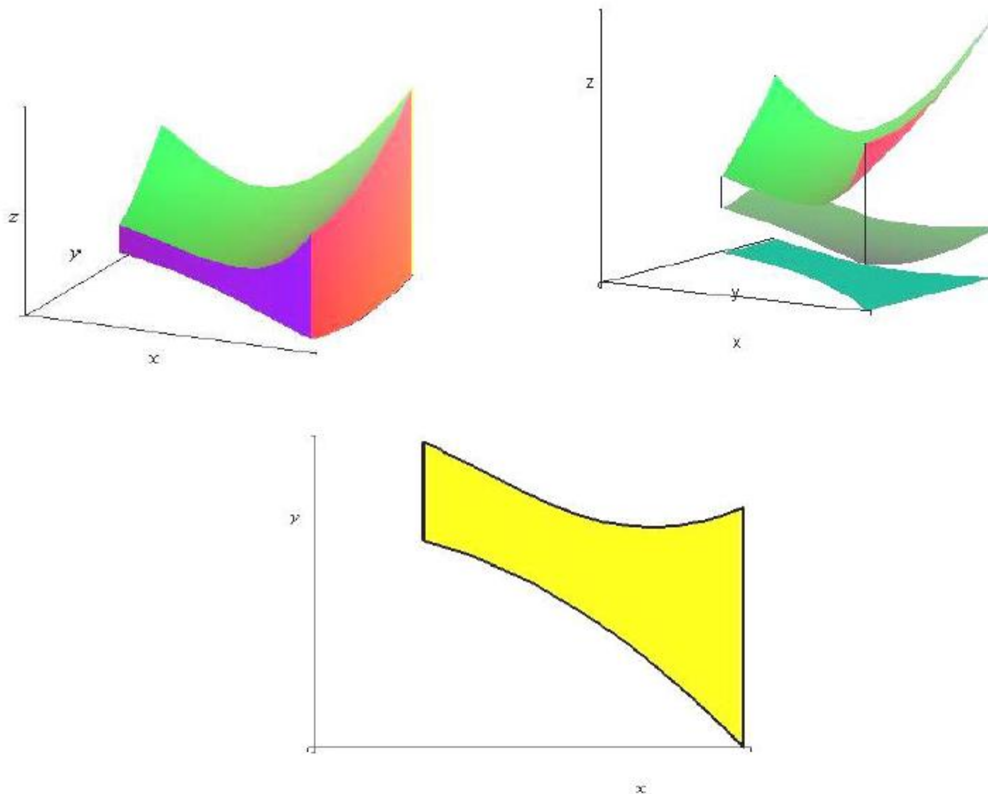
$P = \{(x,y,z) : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge e \leq z \leq f \}$,

Sea P una partición del paralelepípedo P obtenida por el producto cartesiano de las particiones P_x, P_y; P_z de los intervalos [a,b], [c,d] y [e,f]

$P_x = \{ x_0, x_1, x_2, \dots , x_n \}$; $P_y = \{ y_0, y_1, y_2, \dots , y_m \}$; $P_z = \{ z_0, z_1, z_2, \dots , z_l \}$

La integral triple $\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{\Delta V_{ijk} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} f(a_i, c_j, e_k) \Delta V_{ijk}$

Donde $a_i \in [a,b]$; $c_j \in [c,d]$; $e_k \in [e,f]$



Cuando f(x,y,z) = 1, al hallar la integral se obtiene el volumen de la región B

- Masa de un sólido en el espacio

$$m = \iiint_B \rho(x,y,z)dV$$

- Momento estático de un sólido en el espacio

Momento estático alrededor del plano xy $M_{xy} = \iiint_B z\rho(x,y,z)dV$

Momento estático alrededor del plano yz $M_{yz} = \iiint_B x\rho(x,y,z)dV$

Momento estático alrededor del plano xz $M_{xz} = \iiint_B y\rho(x,y,z)dV$

- Centro de masa de un sólido en el espacio

$$x = \frac{1}{m}\iiint_B \; x\rho(x,y,z)dV$$

$$y \; = \frac{1}{m}\iiint_B \; y\rho(x,y,z)dV$$

$$z \; = \frac{1}{m}\iiint_B \; z\rho(x,y,z)dV$$

- Momento de inercia de figuras planas

$$\mathbf{I_x} = \iiint_B \; (y^2 + z^2)z\rho(x,y,z)dV$$

$$\mathbf{I_y} = \iiint_B \; (x^2 + z^2)(x,y,z)dV$$

$$\mathbf{I_z} \; = \iiint_B \; (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dV$$

- Momento polar de inercia $I_z \; = \iiint_B \; (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dV$

III. SINTETIZAR LAS IDEAS PRINCIPALES

- Señalar las características comunes de cada uno de los conceptos.
- Expresar la forma de aplicar esas características en cada uno de los ejercicios anteriores.
- Relacionar los conceptos con los ejercicios.
- Formular estrategias de trabajo para enfocar los diferentes ejercicios haciendo uso de la teoría.

IV. ACCIONES EN EL AULA. SOLUCIÓN DE EJERCICOS Y PROBLEMAS

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

- ÁREAS

Calcular el área de la región D.

Para cada caso determina si es conveniente expresar las funciones dependientes de x ó de y.
Basado en a) Analizar la propiedad aditiva respecto a la región de integración
b) La facilidad de integrar la función integrando

i.- $D = \{ (x,y) : x \geq y^2 - 2y \wedge x \leq 4 - y^2\}$

ii.- La región limitada por las curvas $y = 16x + 20$; $y = -2x +20$; $y = 4x^2$

iii.- Región limitada por dos círculos concéntricos de radios 2 y 4

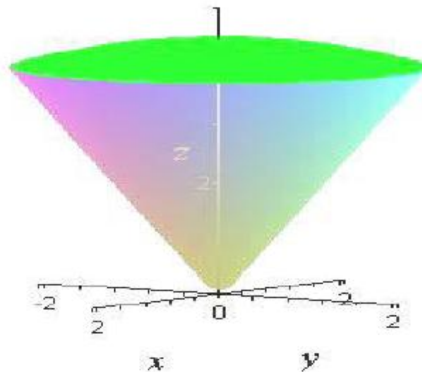
- VOLUMENES

Calcular el volumen del sólido acotado por las superficies dadas. Reconocer el tipo de superficie.

Plantearlo mediante

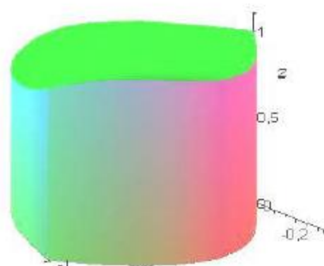
a) Integrales dobles
b) Integrales triples

i. $z = 2\sqrt[2]{x^2 + y^2}$ y $z = \sqrt[2]{20 - x^2 - y^2}$

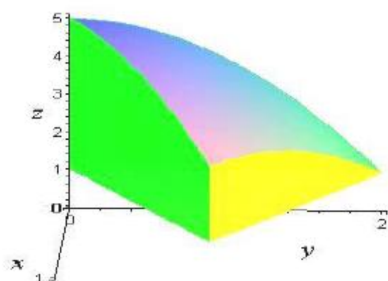


ii.- $z = 4 + xy$; $z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$

iii.- $z = 1 + x^3y + xy^3$; $z = 0$; $y = x^3 - x$; $y = x^2 + x$



iv.- $x = 0$; $y = x$; $y = 2 - x$; $z = 1$ y $z = 5 - x^2 - y^2$



v.-$y = 4$; $y = x^2$; $z = 0$; $z = 4 - y$

vi.- Esferas concéntricas de radio 1 y 5

- MASA DE UNA FIGURA PLANA

Determinar la masa de la placa limitada por las curvas dadas a continuación y cuya densidad se especifica en cada caso.

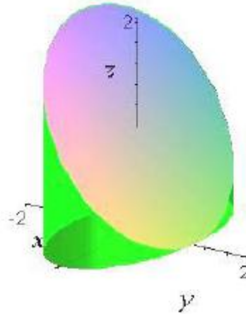
i.- Placa limitada por las curvas $x = y^2 - 1$; $x = 2y^2 - 2$ y densidad igual a 1.534

ii.- Placa limitada por las curvas $y = (3/2)\,x^2 - 6x + 4$; $y = 2\,|x - 2|$ y densidad $\rho(x,y) = 1 + 2x$

- MASA DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO

Determinar la masa del sólido comprendido entre

i.-Los planos $z = 0$; $z = 1 - y$; dentro de la superficie definida por $x^2 + 4y^2 = 4$ cuya densidad viene dada por $\rho(x,y,z) = 2z$



ii.-Los paraboloides $z = 4x^2 + 4y^2$; $z = 8 - 4x^2 - 4y^2$, cuya densidad viene dada por $\rho(x,y,z) = x + y + z + 1$

- MOMENTOS ESTÁTICOS DE FIGURAS PLANAS

Determinar los momentos estáticos de la placa

i.- Placa limitada por las curvas $x = y^2 - 1$; $x = 2y^2 - 2$ y densidad igual a 1.534

ii.- .- Placa limitada por las curvas $y = (3/2)\, x^2 - 6x + 4$; $y = 2\,|x - 2|$ y densidad $\rho(x,) = 1 + 2x$

- MOMENTOS ESTÁTICOS DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO

Calcular los momentos estáticos alrededor de los planos coordenados para el sólido

i.-Los planos $z = 0$; $z = 1 - y$; dentro de la superficie definida por $x^2 + 4y^2 = 4$ cuya densidad viene dada por $\rho(x,y,z) = 2z$

ii.-Los paraboloides $z = 4x^2 + 4y^2$; $z = 8 - 4x^2 - 4y^2$, cuya densidad viene dada por $\rho(x,y,z) = x + y + z + 1$

- **CENTROS DE MASA DE FIGURAS PLANAS**

Determinar los centros estáticos de la placa

i.- Placa limitada por las curvas $x = y^2 - 1$; $x = 2y^2 – 2$ y densidad igual a 1.534

ii.- Placa limitada por las curvas $y = (3/2)\, x^2 - 6x + 4$; $y = 2\,|x – 2|$ y densidad

$\rho(x,) = 1 + 2x$

- **CENTROS DE MASA DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO**

Determinar las coordenadas del centro de masa del sólido descrito por :

i.-Los planos $z = 0$; $z = 1 – y$; dentro de la superficie definida por $x^2 + 4y^2 = 4$ cuya densidad viene dada por $\rho(x,y,z) = 2z$

ii.-Los paraboloides $z = 4x^2 + 4y^2$; $z = 8 – 4x^2 -4y^2$, cuya densidad viene dada por $\rho(x,y,z) = x + y + z + 1$

- **MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS PLANAS**

Calcular los momentos de inercia de la placa

i.- Placa limitada por las curvas $x = y^2 - 1$; $x = 2y^2 – 2$ y densidad igual a 1.534

ii.- Placa limitada por las curvas $y = (3/2)\, x^2 - 6x + 4$; $y = 2\,|x – 2|$ y densidad

$\rho(x,) = 1 + 2x$

V. TRABAJO INDEPENDIENTE EXTRA CLASE

Cada estudiante debe de

Buscar en diferentes libros, seleccionar y resolver 5 ejercicios de cada tipo. Cada miembro del equipo debe de exponer sus ejercicios a los otros y discutirlos en asamblea

VI. CONCLUSIONES

Realizar un resumen de la hoja señalando los aspectos comunes y las diferencias.

http://www.ing.uc.edu.ve/~gcisneros/pdf/intmúltiples y sus aplicaciones.pdf

BIBLIOGRAFÍA

- Apostol T. M. 2001 Análisis Matemático. Ed. Reverté

- Ausubel, David, Novak, Joseph y Hanesian, Helen "Psicología Educativa. Trillas, México,1992

- Ayres F. Jr., Mendelson E., *Cálculo diferencial e integral,* Mc Graw Hill

- Berman B.N. 1992.Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial Mir.

- Brousseau,G: "Theory of didactical situations in mathematics", Kluwwer Academic Publishers 1997

- Camarena, G. Patricia: "La Matemática en el contexto de las ciencias" Antologías. No.1 Rede de CIMATES. Programa Editorial. 2001

- Cantoral, Ricardo; Farfán, R. María y otros: "Desarrollo del Pensamiento Matemático".Trillas 2003

- Cooper Jeffery. 2001. A Matlab companion for multivariable Calculus. Editorial Harcourt Academic Press.

- Cribeiro, D. Josefina: "Interrelación entre calidad educativa, investigación y las nuevas tecnologías de la información" 3er Foro estatal de Ciencia y Tecnología. COECYT 2001

- Demidovich, Boris P.1980. 5000 Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial Paraninfo

- Fariñas, Gloria: "Maestro, una estrategia para la enseñanza" Academia. Habana 1995

- Fulks, W.1985. Advanced Calculus. Springer Verlag

- Galperin, P. Ya: "Los tipos fundamentales de aprendizaje" Imprenta Universitaria. Cuba. 1974

- Galperin, P. Ya: "Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales". Antología de la psicología pedagógica y de las edades. Editorial Pueblo y Educación. Cuba. 1986

- Galperin, P. Ya: "Sobre el método de formación por etapas de las acciones mentales", en Psicología Evolutiva y Pedagógica en la URSS. Moscú. 1987

- Granville W., *Cálculo Diferencial e Integral*, Limusa

- Hernández C, Lam E, Oteyza E. 1991 Comunicación interna #180 Dpto Matemáticas UNAM

- Hughes Hallet Deborah. 1998 Cálculo Aplicado. Ed. CECSA

- Kudriavstev L.D. 1983 Curso de Análisis Matemático. Editorial Mir. Moscú

- Leithold L., 1999 *El Cálculo*, Oxford University Press.

- Leontiev, A: "La actividad en Psicología". Pueblo y Educación. Habana. Cuba. 1981

- Marchand-O Patrick. Thomas Holland. 2003. Graphics and GUIs with MATLAB. Editorial Chapman and Hall/CRC. 3ra. Edition.

- Piskunov. N. 1977 Cálculo Diferencial e Integral Ed. MIR. Moscú

- Smith & Milton., *Cálculo Diferencial e Integral*, Mc Graw-Hill

- Spivak Michael. 1997 Calculus.Segunda Ed.Reverté

- Stewart James: "Cálculo. Conceptos y contextos" Internacional Thomson Editores. 1999

- Swokowski. Earl W., *Calculo Con Geometría Analítica*, Iberoamericana.

- Talízina, Nina F.: "Procedimientos iniciales del pensamiento lógico". DEPES-MES. Universidad de Camagüey. Cuba. 1987

- Talízina, Nina F. "Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior" DEPES-MES. Universidad de la Habana. Cuba. 1987

- Valenzuela González Jaime R. "Motivación en la Educación a Distancia." http:/www.ruv.itesm.mx/ege/cie/ponencias/valenzuela/Pon2vale.htm

- Velázquez, B. Santiago R.: "El desarrollo de habilidades matemáticas en situación escolar". Grupo Editorial Iberoamérica 2001

- Vygotsky, L: "Pensamiento y lenguaje" Editorial Pueblo y Educación. La Habana Cuba. 1982

- Vygotsky, L: "Mind in Society, the development of higher psycological process". Harvard University Press.

- Zill Dennis G., *Calculo con Geometría Analítica*, Iberoamericana.

Primera Edición: 13 de septiembre de 2013 con un tiraje de 250 ejemplares